

BAUTECHNIK-ARCHIV

HEFT 7

INHALT:

Stabilität I-förmiger Querschnitte unter der örtlichen Lasteinleitung.

Von Dr.-Ing. Johann Jakob Rieve

Die Typenwertmethode, ein neues Verfahren zur Berechnung von bewehrten und unbewehrten Baukörpern.

Von Oberingenieur Heinrich Sasse, V S I. Leiter des technischen Bildungsinstitutes Siegerland in Neukirchen, Kreis Siegen.

Gekrümmte Faltwerke.

Von Dr.-Ing. habil. Ernst Gruber, Oberregierungsbaurat z. Wv., Eldingen über Celle.

Mit 64 Bildern



BERLIN 1953

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN

BAUTECHNIK-ARCHIV

HEFT 7

INHALT:

Stabilität I-förmiger Querschnitte unter der
örtlichen Lasteinleitung. Seite 3

Von Dr.-Ing. Johann Jakob Rieve

Die Typenwertmethode, ein neues Verfahren
zur Berechnung von bewehrten und unbe-
wehrten Baukörpern. Seite 32

*Von Oberingenieur Heinrich Sasse, V S I. Leiter des
technischen Bildungsinstitutes Siegerland in Neu-
kirchen, Kreis Siegen.*

Gekrümmte Faltwerke. Seite 62

*Von Dr.-Ing. habil. Ernst Gruber, Oberregierungsbau-
rat z. Wv., Eldingen über Celle.*

Mit 64 Bildern



BERLIN 1953

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung, vorbehalten
Nachdruck und fotomechanische Wiedergabe — auch auszugsweise — verboten

Copyright 1953 by Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin

III/5/3. Lizenz-Nr. 5000/155/52

Printed in Germany

Stabilität I-förmiger Querschnitte unter der örtlichen Lasteinleitung

Von Dr.-Ing. J. J. Rieve, Kiel

1. Einleitung

Wir besitzen eingehende Untersuchungen¹⁾ über die Stabilität der Stege von Querschnitten unter Normal-, Schub-, Biege und Biege-Schubspannungen, deren Ergebnisse in der DIN 4114: Knick-, Kipp- und Beulvorschriften für Baustahl niedergelegt sind. Im nachfolgenden sollen diese Untersuchungen ergänzt werden durch eine Arbeit über das Verhalten dieses Bauteils unter der Wirkung solcher örtlicher Spannungen, die entstehen, wenn eine Einzellast auf dem Oberflansche des I-Querschnitts wirkt und durch diesen auf das Stegblech einzutragen ist, ohne daß dazu besondere Steifen vorgesehen sind. Rollt beispielsweise nach Abb. 1 eine Kranlast über einen Kranträger, den wir hier als geschweißtes Blechprofil annehmen, so entstehen infolge der Biegsamkeit des Trägeroberflansches zwischen den Aussteifungen durch die örtliche Lasteinleitung sehr beachtliche Druckspannungen im Stegblechoberteil. Es läßt sich einsehen, daß diese

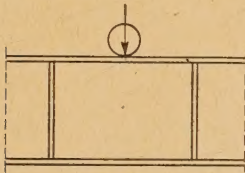


Bild 1.

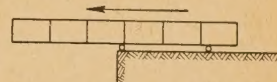


Bild 2.

Druckspannungen das Stegblech der Gefahr des Ausbeulens aussetzen. Insbesondere wenn man bedenkt, daß die Gesamtträgerwirkung Biegedruckspannungen bzw. Schubspannungen hervorruft, die für sich allein schon eine Stabilitätsuntersuchung notwendig machen. Ähnliche Lastwirkungen treten auf bei den Längsträgern weitgespannter Brücken und bei der Montage von Brücken im freien Vorschub, wie sie in Abb. 2 angedeutet ist. Besonders in diesem letzten Falle sind die Spannungen aus der örtlichen Lasteinleitung von ausschlaggebender Bedeutung für die Bemessung und Stabilität des Stegbleches. Aus diesem Bereiche stammt auch eine wertvolle Untersuchung²⁾ zu dieser Frage.

2. Spannungen im Stegblech

Die örtlichen Spannungen, die im Stegblech unter der Lasteinleitung entstehen, werden in der allgemeinen Berechnung der Träger nach der Navierschen Biegetheorie gar nicht berücksichtigt. Für die nachfolgende Berechnung kommt es aber gerade auf diese sogenannte „lokale Spannungsstörung“ an. Um sie erfassen zu können, beziehen wir uns auf eine periodische Belastung des Ober- und Unterflansches nach Abb. 3.

Die Berechnung der Spannungen im Stegblech wird in Anlehnung an eine andere Arbeit des Verfassers³⁾ durchgeführt.

Die Spannungen sind durch die Airy'sche Spannungsfunktion F folgendermaßen anzuschreiben:

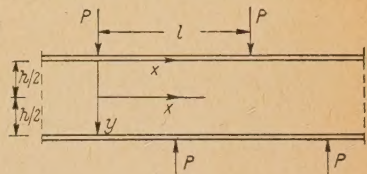


Bild 3.

¹⁾ Ausführlicher Schrifttumsnachweis siehe Chwalla: Erläuterung zum DIN-Entwurf 4114.

²⁾ K. Girkmann: Stegblechbeulung unter örtlichem Lastangriff. Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. 145 (1936) Heft 1/2.

³⁾ Rieve: Die Spannungsverteilung zwischen Gurt und Stegblech unter der örtlichen Lasteinleitung beim I-Querschnitt. ZAMM, Bd. 28 (1948), H. 7/8.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (1)$$

F hat dabei die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{2 \partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (2)$$

zu erfüllen. Dieser Bedingung genügen Funktionen, die folgenden Aufbau zeigen:

$$F = \Phi_1 + y \cdot \Phi_2. \quad (3)$$

Φ_1 und Φ_2 sind Potentialfunktionen und erfüllen damit die *Cauchy-Riemann'schen* Bedingungen

$$\Phi_{1xx} = -\Phi_{1yy} \text{ und } \Phi_{2xx} = -\Phi_{2yy}. \quad (4)$$

Die tiefgestellten Indices bedeuten die Ableitung nach diesen Größen.

Für die Spannungsausdrücke erhalten wir jetzt:

$$\sigma_x = \Phi_{1yy} + 2\varphi_{yy} + y \cdot \Phi_{2yyy} = -\Phi_{1xx} - 2\Phi_{2xx} - y \cdot \Phi_{2xxy}. \quad (5a)$$

$$\sigma_y = \Phi_{1xx} + y \cdot \Phi_{2xxy} = -\Phi_{1yy} - y \cdot \Phi_{2yyy}. \quad (5b)$$

$$-\tau_{xy} = \Phi_{1xy} + \Phi_{2xy} + y \cdot \Phi_{2xyy} \quad (5c)$$

und für die Verschiebungen:

$$E \cdot u = -\Phi_{1x}(1+\nu) - 2\Phi_{2x} - y \cdot \Phi_{2xy}(1+\nu) \quad (6a)$$

$$E \cdot v = -\Phi_{1y}(1+\nu) + \Phi_{2y}(1-\nu) - y \cdot \Phi_{2yy}(1+\nu). \quad (6b)$$

(E = Elastizitätszahl, ν = Querdehnungszahl).

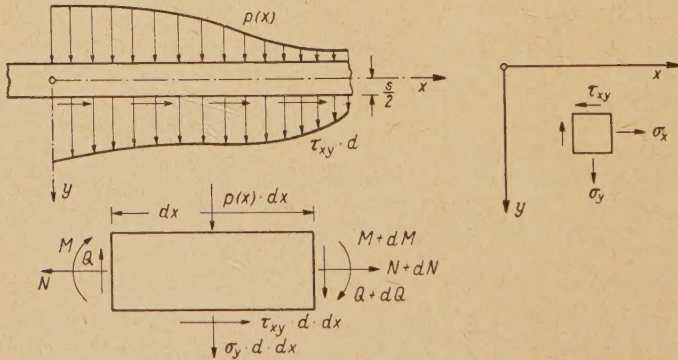


Bild 4.

Die Potentialfunktionen müssen die Randbedingungen am oberen und unteren Stegblechrand erfüllen. Dazu betrachten wir zunächst die Formänderungen und Spannungen des Gurtes, der als biegesteifer Stab angesehen wird.

Wir erhalten mit der Abb. 4 folgende Gleichungen

$$EJ \cdot \bar{u}_{xxx} = -\frac{J}{F_g} d \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{s}{2} \left[p(x) + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} \cdot d \cdot \frac{s}{2} + \bar{\sigma}_y \cdot d \right] \quad (7a)$$

$$-EJ \cdot \bar{v}_{xxx} = p(x) + \bar{\sigma}_y \cdot d + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} \cdot d \cdot \frac{s}{2}. \quad (7b)$$

d = Stegblechstärke

F_g = Querschnittsfläche des Gurtes

J = Trägheitsmoment des Gurtes

$\frac{s}{2}$ = Abstand des Gurtschwerpunktes von der Berührungsfläche Gurt — Steg.

Durch Überstreichen sind die Spannungen am Blechrande gekennzeichnet.

Wir führen nun für die Verschiebungen nach den Glchg. (6) die Potentialfunktionen ein und erhalten für den oberen Rand mit $y = \frac{h}{2}$

$$J \left[\Phi_{1xxxxxy}(1+\nu) - \Phi_{2xxxxxy}(1-\nu) + \frac{h}{2} \cdot \Phi_{2xxxxxyy}(1+\nu) \right] \Bigg| = p(x) + \bar{\sigma}_y \cdot d + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} \cdot d \cdot \frac{s}{2} \quad (8a)$$

$$J \left[-\Phi_{1xxxxx}(1+\nu) - 2\Phi_{2xxxxx} - \frac{h}{2} \Phi_{2xxxxxy}(1+\nu) \right] \Bigg| = -\frac{J}{F_g} \cdot d \cdot \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} - \frac{s}{2} \left[p(x) + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} \cdot d \cdot \frac{s}{2} + \bar{\sigma}_y \cdot d \right] \quad (8b)$$

Wir setzen jetzt für die Belastung und Airy'sche Spannungsfunktionen F gemäß Abb. 3 folgende Reihen an:

$$p(x) = \frac{P}{l} + \frac{2P}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi k}{l} x \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (9)$$

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot k^2} \cos \frac{2\pi k}{l} x \left\{ c_{1k} \left[e^{\frac{2\pi k}{l} y} + (-1)^k \cdot e^{-\frac{2\pi k}{l} y} \right] + c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{l} \cdot y \left[e^{\frac{2\pi k}{l} y} - (-1)^k \cdot e^{-\frac{2\pi k}{l} y} \right] \right\} \quad (10)$$

$k = 1, 2, 3$

Mit Glchg. (3) daraus

$$\varphi_1 = \Phi_{1xx} = - \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi k}{l} x \cdot c_{1k} \left[e^{\frac{2\pi k}{l} y} + (-1)^k \cdot e^{-\frac{2\pi k}{l} y} \right] \quad (11a)$$

$$\varphi_2 = \Phi_{2xx} = - \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi k}{l} x \cdot c_{2k} \left[e^{\frac{2\pi k}{l} y} + (-1)^k \cdot e^{-\frac{2\pi k}{l} y} \right] \quad (11b)$$

$k = 1, 2, 3$

Die Ansätze sind so angeschrieben, daß sie den Randbedingungen am oberen und unteren Blechrande mit den zwei Freiwerten c_{1k} und c_{2k} Genüge leisten. Diese Freiwerte sind zu bestimmen.

Wir haben zunächst die Wirkung des nichtperiodischen Anteils $\frac{P}{l}$ der Belastung nach Glchg. (9) zu verfolgen. Wie man sofort erkennt, werden die Spannungen

$$\sigma_y = -\frac{P}{l \cdot d}; \quad \sigma_x = -\frac{\nu \cdot P}{l \cdot d} \quad (12)$$

Der Wert für σ_x setzt voraus, daß keine Längsverschiebungen auftreten. Ist die Blechebene in x -Richtung an den Rändern frei längsbeweglich, dann wird $\sigma_x = 0$.

Für die Berechnung des periodischen Anteiles treffen wir die vereinfachenden Annahmen:

$$F_g = \infty; \quad s = 0. \quad (13)$$

Damit entfällt die Berücksichtigung der Längsverformbarkeit des Gurtes und der Einfluß der Ausmittigkeit des Lastangriffes im Gurt, was auch der Annahme entspricht,

daß die Berührungsebene Gurt—Steg mit der Schwerachse des Gurtcs zusammenfällt. Die vereinfachten Gl. (8) lauten:

$$J \left[\varphi_{1xx} (1+\nu) - \varphi_{2xx} (1-\nu) + \frac{h}{2} \cdot \varphi_{2xxy} (1+\nu) \right] = p(x) - \frac{2}{1+\nu} \cdot \varphi_2 \cdot d. \quad (14a)$$

$$\varphi_1 (1+\nu) + 2\varphi_2 + \frac{h}{2} \cdot \varphi_{2y} (1+\nu) = 0, \quad (14b)$$

wobei jetzt $\varphi = \Phi_{xx}$ gesetzt ist.

Für die Konstanten daraus mit $\frac{2\pi k}{l} \cdot \frac{h}{2} = t$

$$c_{1k} = \frac{-2P}{l \cdot d} \cdot \frac{1 + \frac{1+\nu}{2} \cdot t \cdot \frac{e^t - (-1)^k e^{-t}}{e^t + (-1)^k e^{-t}}}{\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^3 \frac{J(3-\nu)(1+\nu)}{2d} [e^t - (-1)^k \cdot e^t] + [e^t + (-1)^k \cdot e^{-t}]} \quad (15a)$$

$$c_{2k} = \frac{-2P}{l \cdot d} \cdot \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^3 \frac{J(3-\nu)(1+\nu)}{2d} [e^t - (-1)^k \cdot e^t] + [e^t + (-1)^k \cdot e^{-t}]} \quad (15b)$$

Um eine weitere Vereinfachung durchführen zu können, wird die Anwendung der Ansätze auf solche Blechfelder beschränkt, bei denen $\alpha = \frac{h}{l}$ den Wert 1 nicht allzusehr überschreitet.

Für den kleinsten k -Wert $k=1$ wird dann erhalten:

$$\begin{aligned} \text{bei } \alpha = 2,0 & \begin{cases} e^{+t} = e^{+\frac{\pi}{2}} = 4,81049 \\ e^{-t} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,20788 \end{cases} \\ \text{bei } \alpha = \frac{4}{3} & \begin{cases} e^{+t} = e^{+\frac{3}{4}\pi} = 10,55072 \\ e^{-t} = e^{-\frac{3}{4}\pi} = 0,09478 \end{cases} \\ \text{bei } \alpha = 1,0 & \begin{cases} e^{+t} = e^{+\pi} = 23,14069 \\ e^{-t} = e^{-\pi} = 0,04321 \end{cases} \end{aligned}$$

Also bei $\alpha \leq 1,0$ $e^{-t} = 0$.

Mit dieser Vereinfachung geben die Konstanten

$$c_{1k} = \frac{2P}{l \cdot d} \cdot \frac{1 + \frac{k\pi}{\alpha} \cdot \frac{1+\nu}{2}}{e^{\frac{k\pi}{\alpha}} \left[\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^3 \frac{J(3-\nu)(1+\nu)}{2d} + 1 \right]}, \quad (16a)$$

$$c_{2k} = -\frac{2P}{l \cdot d} \cdot \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{k\pi}{\alpha}} \left[\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^3 \frac{J(3-\nu)(1+\nu)}{2d} + 1 \right]}. \quad (16b)$$

In den Gl. (16) wird jetzt gesetzt:

$$(1+\nu)(3-\nu) \frac{J}{2d} = r^3; \quad l = \lambda \cdot r \quad (17)$$

mit λ als dimensionsloser Länge der Periode der Reihenentwicklung.
Für die Konstanten ergibt sich dann

$$c_{1k} = \frac{2P}{r \cdot \lambda \cdot d} \cdot \frac{1 + \frac{k\pi}{a} \cdot \frac{1+\nu}{2}}{e^{\frac{k\pi}{a}} \left(\frac{8k^3\pi^3}{\lambda^3} + 1 \right)}, \quad (18a)$$

$$c_{2k} = -\frac{2P}{r \cdot \lambda \cdot d} \cdot \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{k\pi}{a}} \left(\frac{8k^3\pi^3}{\lambda^3} + 1 \right)}. \quad (18b)$$

Die Potentialfunktionen sind damit bekannt. Wir können jetzt mit ihrer Hilfe die Blechspannungen nach den Glchg. (5) anschreiben. Zunächst sei die Pressung $\bar{\sigma}_y$ zwischen Gurt und Steg näher untersucht. Sie ist nach Glchg. (5)

$$\bar{\sigma}_y = \Phi_{1xx} + \frac{h}{2} \Phi_{2xxy}.$$

Darin die Potentialfunktion nach Glchg. (11) und die Freiwerte nach Glchg. (18) eingesetzt, liefert mit der Vereinfachung $e^{-t} \rightarrow 0$

$$\bar{\sigma}_y' = -\frac{2P}{r \cdot \lambda \cdot d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi k}{l} x}{\frac{8k^3\pi^3}{\lambda^3} + 1} \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (19)$$

Die Gesamtspannung ist dann mit den Glchg. (12) und (19)

$$\bar{\sigma}_y = -\frac{P}{r \cdot \lambda \cdot d} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi k}{l} x}{\frac{8k^3\pi^3}{\lambda^3} + 1} \right] \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (20)$$

Man erkennt in dieser Gleichung die Zweckmäßigkeit der Einführung der dimensionslosen Periode λ . Wir haben in dieser Schreibweise eine allgemeine Form der Spannungsverteilung, die sich ausdrückt in der eckigen Klammer und durch eine entsprechende Summierung nur einmal ermittelt zu werden braucht. Die Anwendung dieser allgemeinen Spannungsverteilung auf die besonderen Tragwerksverhältnisse erfolgt durch den Multiplikator $\frac{2P}{l \cdot \lambda \cdot r}$ und durch den Wert r in der dimensionslosen Periode λ . Nehmen wir beispielsweise 2 Gurte an, bei denen für die Trägheitsmomente gilt $J_1 : J_2 = \frac{1}{8}$, dann haben wir $r_1 : r_2 = Z \cdot \sqrt[3]{1} : Z \sqrt[3]{8} = 1 : 2$. Der 8 mal steifere Gurt führt auf eine doppelte Strecke l . Dafür sind die Spannungen in den entsprechenden Punkten nur halb so groß.

In Abb. 5 ist die Glchg. (20) ausgewertet. Dabei wurde die frei wählbare dimensionslose Periode $\lambda = 10$ gesetzt, was sich als zweckmäßig erweist. Ein größerer Wert verschlechtert die Konvergenz der Reihe; ein kleinerer hindert eine ungestörte Entwicklung der Spannungsverteilung dadurch, daß die Periodengrenzen innerhalb des Bereiches der lokalen Spannungsstörung fallen.

Für die Pressung am unteren Rande bekommt man nach einiger Rechnung

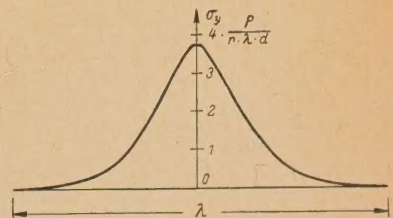


Bild 5.

$$\sigma_y = -\frac{P}{r \cdot \lambda \cdot d} \left[1 + (-1)^k \cdot 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi k}{l} x}{\frac{8k^3 \pi^3}{\lambda^3} + 1} \right] \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (21)$$

Sie liefert ausgewertet dieselbe Spannungsverteilung wie nach Glchg. (20), nur liegen die Werte um $\frac{l}{2}$ in x -Richtung verschoben. Das entspricht der Lastverteilung am Unterrande.

Allgemein erhalten wir für die Spannungsverteilung im Blech mit den Glchg. (5), (11) und (18)

$$\sigma_y = -\frac{P}{r \cdot \lambda \cdot d} - \frac{2P}{r \cdot \lambda \cdot d} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi k}{l} x \frac{1}{e^{\frac{\pi k}{\alpha}} \left(\frac{8k^3 \pi^3}{\lambda^3} + 1 \right)} \quad (22a)$$

$$\left\{ \left[1 + \frac{\pi k}{2\alpha} (1+\nu) \right] \left(e^{\frac{2\pi k}{l} y} + (-1)^k \cdot e^{-\frac{2\pi k}{l} y} \right) - \frac{1+\nu}{2} \frac{2\pi k}{l} y \left[e^{\frac{2\pi k}{l} y} - (-1)^k \cdot e^{-\frac{2\pi k}{l} y} \right] \right\}$$

$$\sigma_x = -\frac{\nu \cdot P}{r \cdot \lambda \cdot d} + \frac{2P}{r \cdot \lambda \cdot d} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi k}{l} x \frac{1}{e^{\frac{\pi k}{\alpha}} \left(\frac{8k^3 \pi^3}{\lambda^3} + 1 \right)} \cdot \left\{ \left[1 + \frac{\pi k}{\alpha} (1+\nu) - (1+\nu) \right] \left[e^{\frac{2\pi k}{l} y} + (-1)^k \cdot e^{-\frac{2\pi k}{l} y} \right] \right. \quad (22b)$$

$$\left. - \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{2\pi k}{\alpha} y \left[e^{\frac{2\pi k}{l} y} - (-1)^k \cdot e^{-\frac{2\pi k}{l} y} \right] \right\},$$

$$\tau_{xy} = \frac{2P}{r \cdot \lambda \cdot d} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi k}{l} x \cdot \frac{1}{e^{\frac{\pi k}{\alpha}} \left(\frac{8k^3 \pi^3}{\lambda^3} + 1 \right)} \left\{ \left[1 + \frac{\pi k}{\alpha} \cdot \frac{1+\nu}{2} - \frac{1+\nu}{2} \right] \cdot \left[e^{\frac{2\pi k}{l} y} - (-1)^k \cdot e^{-\frac{2\pi k}{l} y} \right] - \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{2\pi k}{l} y \left[e^{\frac{2\pi k}{l} y} + (-1)^k \cdot e^{-\frac{2\pi k}{l} y} \right] \right\} \cdot \quad (22c)$$

$$k = 1, 2, 3 \dots$$

In ein Blechfeld l/h nach Bild 3 wird also eine Spannungsstörung vom Oberrande und Unterrande eingetragen. Das ist für die weitere Berechnung zu beachten.

3. Die Beuluntersuchung eines Stegblechfeldes

Es wird ein Stegblechfeld mit den Seitenlängen a und b betrachtet (Bild 6) und dafür die Last P berechnet, die, auf dem Obergurte örtlich wirkend, das Stegblech ausbeulen

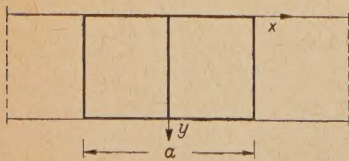


Bild 6.

läßt. Um die Ansätze zweckmäßiger gestalten zu können, wird hier ein anderes Koordinatensystem verwandt, als in den Ansätzen unter 2. Wie ein Vergleich von Bild 3 mit Bild 6 zeigt, soll das Koordinatensystem seinen Ursprung im Lastangriffspunkt am Unterrande des Obergurtes haben. Damit sind die Spannungsausdrücke aus 2. entsprechend umzuformen. Die Last P greift also in der Mitte des Stegblechfeldes an. Die Ränder

$x = \pm a/2$ werden durch Aussteifungen daran gehindert, sich aus der Stegblech-

ebene zu verschieben. Für den Ober- und Unterrand übernehmen die Gurte die gleiche Aufgabe. Um eine Übereinstimmung mit den Ansätzen unter 2. zu haben, soll sich der Einfluß der örtlichen Lastenleitung gerade über die Länge a des Stegblechfeldes erstrecken, so daß gilt $l = r \cdot \lambda = a$. Die lotrechte Pressung σ_y zwischen Gurt und Steg muß demnach an den Aussteifungen gegen Null gehen. Überhaupt sollen die Aussteifungen keine nennenswerte Störung des Spannungszustandes, wie er unter 2. ermittelt wurde, verursachen.

Für die mathematische Behandlung wird wie üblich vorausgesetzt: vollkommen ebenes Stegblech, homogenes und vollkommen elastisches Material, gelenkige Lagerung an den Rändern, Unverschieblichkeit der Ränder senkrecht zur Stegblechebene.

Die Beuluntersuchung erfolgt nach dem Ritzschen Verfahren¹⁾, wo ein trigonometrischer Ansatz mit Freiwerten der Verwölbungsfläche $w = w(x, y)$ zugrundegelegt wird. Dieser Ansatz ist in den Ausdruck für die Formänderungsarbeit²⁾ einzuführen, der da lautet:

$$A = \int_{-a/2}^{+a/2} \int_0^b \frac{d}{2} (\sigma_x \cdot w_x^2 + \sigma_y \cdot w_y^2 + 2 \tau_{xy} \cdot w_x \cdot w_y) dx dy + \frac{N}{2} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_0^b [(w_{xx} + w_{yy})^2 - 2(1 - \nu)(w_{xx} \cdot w_{yy} - w_{xy}^2)] dx dy. \quad (23)$$

$$\text{Plattensteifigkeit } N = \frac{E \cdot d^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Mit Bild 6 wird für die Auslenkungsfläche mit $\alpha = l/h = a/b$ gesetzt

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \quad \begin{matrix} m = 1, 2, 3 \dots \\ n = 1, 2, 3 \dots \end{matrix} \quad (24a)$$

oder auch

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{\alpha n \pi}{a} y \quad \begin{matrix} m = 1, 3, 5 \dots \\ n = 1, 2, 3 \dots \end{matrix} \quad (24b)$$

Der Ansatz erfüllt die Randbedingungen und hat die Freiwerte A_{mn} . Seine Ableitungen sind

$$w_x = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \cdot A_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{\alpha n \pi}{a} y. \quad (24c)$$

$$w_{xx} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot A_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{\alpha n \pi}{a} y. \quad (24d)$$

$$w_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha n \pi}{a} \cdot A_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{\alpha n \pi}{a} y. \quad (24e)$$

$$w_{yy} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{a^2} \cdot A_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{\alpha n \pi}{a} y. \quad (24f)$$

$$w_{xy} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha m n \pi^2}{a^2} \cdot A_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{\alpha n \pi}{a} y. \quad (24g)$$

¹⁾ Abhdlg. von Ritz in Crelles Journal, Bd. 135, S. 1.

²⁾ Ableitung des Ausdruckes bei Hartmann: Knickung, Kippung und Beulung. Leipzig und Wien 1937.

Diese Ausdrücke sind in Glchg. (23) einzusetzen. Für den ersten Teil der Arbeit der inneren Kräfte wird damit erhalten

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_0^b (w_{xx} + w_{yy})^2 dx dy &= \frac{\pi^4}{a^4} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_0^b \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \\ &\left[A_{mn}^2 (m^2 + a^2 n^2) \cos^2 \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin^2 \frac{\alpha n\pi}{a} y \right. \\ &\left. + 2 A_{mn} \cdot A_{pq} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{\alpha n\pi}{a} y \cdot \cos \frac{p\pi}{a} x \cdot \sin \frac{\alpha q\pi}{a} y \right] dx dy. \end{aligned}$$

Um die gemischtquadratischen Glieder berücksichtigen zu können, müssen außer m und n auch noch p und q eingeführt werden.

Es ist nun allgemein

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{+a/2} \sin^2 \frac{k\pi}{a} x dx &= \frac{a}{2} \quad k = 1, 2, 3 \dots \\ \int_{-a/2}^{+a/2} \sin \frac{k\pi}{a} x \cdot \sin \frac{l\pi}{a} x dx &= 0 \quad \text{Für } k \neq l. \end{aligned}$$

Damit entfällt der 2. Ausdruck in der Integration und es ergibt sich

$$\int_{-a/2}^{+a/2} \int_0^b (w_{xx} + w_{yy})^2 dx dy = \frac{\pi^4}{a^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \frac{a^2}{4\alpha} \cdot (m^4 + 2\alpha^2 m^2 n^2 + \alpha^4 n^4). \quad (25)$$

Für den zweiten Teil der inneren Arbeit erhalten wir

$$\int_{-a/2}^{+a/2} \int_0^b (w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2) dx dy = 0. \quad (26)$$

Das Ergebnis Null wird stets bei einer geradlinigen Begrenzung des Stieglechfeldes erhalten¹⁾.

Für die Berechnung der Arbeit der äußeren Kräfte werden zunächst die Spannungsausdrücke von 2. auf das geänderte Koordinatensystem umgerechnet. Dabei spalten wir die Ansätze auf in die Fälle k = ungerade und k = gerade und ersetzen die Exponentialfunktionen durch Hyperbelformationen.

Für die Spannung σ_x haben wir dann bei k = ungerade

$$\begin{aligned} \sigma_x = -\frac{\nu \cdot P}{a \cdot d} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi k}{a} x \left\{ \left[2(c_{1k} + 2c_{2k}) \sin \frac{\pi k}{a} \right. \right. \\ \left. \left. + 2c_{2k} \cdot \frac{\pi k}{a} \coth \frac{\pi k}{a} \right] \coth \frac{2\pi k}{a} y + 2c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} \sinh \frac{\pi k}{a} \cdot y \cdot \sinh \frac{2\pi k}{a} y \right. \\ \left. - \left[2(c_{1k} + 2c_{2k}) \coth \frac{\pi k}{a} + 2c_{2k} \cdot \frac{\pi k}{a} \cdot \sinh \frac{\pi k}{a} \right] \sinh \frac{2\pi k}{a} y \right. \\ \left. - 2c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} \cdot \coth \frac{\pi k}{a} \cdot y \cdot \coth \frac{2\pi k}{a} y \right\} \quad (27a) \end{aligned}$$

¹⁾ Willers: Die erste Variation der Formänderungsarbeit ausgebeulter Platten. ZAMM, Bd. 20 (1940), Nr. 2, S. 118.

bei $k = \text{gerade}$

$$\sigma_x = -\frac{\nu \cdot P}{a \cdot d} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi k}{a} x \left\{ \begin{aligned} & \left[2(c_{1k} + 2c_{2k}) \mathfrak{Cof} \frac{\pi k}{a} + 2c_{2k} \cdot \frac{\pi k}{a} \cdot \mathfrak{Sin} \frac{\pi k}{a} \right] \mathfrak{Cof} \frac{2\pi k}{a} y \\ & + 2c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} \cdot \mathfrak{Cof} \frac{\pi k}{a} \cdot y \cdot \mathfrak{Sin} \frac{2\pi k}{a} y \\ & - \left[2(c_{1k} + 2c_{2k}) \mathfrak{Sin} \frac{\pi k}{a} + 2c_{2k} \cdot \frac{\pi k}{a} \cdot \mathfrak{Cof} \frac{\pi k}{a} \right] \mathfrak{Sin} \frac{2\pi k}{a} y \\ & - 2c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} \cdot \mathfrak{Sin} \frac{\pi k}{a} \cdot y \cdot \mathfrak{Cof} \frac{2\pi k}{a} y \end{aligned} \right\} \quad (27b)$$

Die Ausdrücke für σ_y und τ_{xy} sehen ähnlich aus, sollen aber aus Platzrücksichten nicht angeschrieben werden. Um die Ausdrücke etwas zu vereinfachen, benutzen wir die oben auf S. 6 angegebene Näherung $e^{-t} \rightarrow 0$, oder was dasselbe ist $\mathfrak{Sin} \frac{\pi k}{a} \approx \mathfrak{Cof} \frac{\pi k}{a}$.

Damit haben wir dann für die Spannungsausdrücke

$$\sigma_x = -\frac{\nu \cdot P}{a \cdot d} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi k}{a} x \cdot e^{\frac{\pi k}{a}} \left\{ \begin{aligned} & \left[c_{1k} + c_{2k} \left(2 + \frac{\pi k}{a} \right) \right] e^{-\frac{2\pi k}{a} y} \\ & - c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} \cdot y \cdot e^{-\frac{2\pi k}{a} y} \end{aligned} \right\} \quad (28a)$$

$$\sigma_y = -\frac{P}{a \cdot d} - \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi k}{a} x \cdot e^{\frac{\pi k}{a}} \left\{ \begin{aligned} & \left(c_{1k} + c_{2k} \cdot \frac{\pi k}{a} \right) e^{-\frac{2\pi k}{a} y} \\ & - c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} \cdot y \cdot e^{-\frac{2\pi k}{a} y} \end{aligned} \right\} \quad (28b)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi k}{a} x \cdot e^{\frac{\pi k}{a}} \left\{ \begin{aligned} & \left[c_{1k} + c_{2k} \left(1 + \frac{\pi k}{a} \right) \right] e^{-\frac{2\pi k}{a} y} \\ & - c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} \cdot y \cdot e^{-\frac{2\pi k}{a} y} \end{aligned} \right\} \quad (28c)$$

Wie man erkennt, verschwindet jetzt der Unterschied zwischen den Fällen $k = \text{ungerade}$ und $k = \text{gerade}$.

Diese Spannungsausdrücke sind jetzt mit den Auslenkungsansätzen nach den Gl. (24) zu verknüpfen.

Für den σ_x -Anteil der äußeren Arbeit erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
 \sigma_x \cdot w_x^2 = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ -\frac{\nu \cdot P}{a \cdot d} \left[\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot A_m^2 n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2m\pi}{a} x \right) \right. \right. \\
 & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\alpha\pi n}{a} y \right) + \frac{2mp\pi^2}{a^2} A_m n A_p q \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{a} x (m-p) \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{a} x (m+p) \right] \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha\pi}{a} y (n-q) - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha\pi}{a} y (n+q) \right] \right] \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi k}{a} x \cdot e^{\frac{\pi k}{a}} \cdot e^{-\frac{2\pi k}{a} y} \left[c_{1k} + c_{2k} \left(2 + \frac{\pi k}{a} \right) - c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} y \right] \cdot \\
 & \left[\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot A_m^2 n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2m\pi}{a} x \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\alpha\pi n}{a} y \right) \right. \\
 & + \frac{2mp\pi^2}{a^2} \cdot A_m n \cdot A_p q \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{a} x (m-p) - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{a} x (m+p) \right] \\
 & \left. \left. \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha\pi}{a} y (n-q) - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha\pi}{a} y (n+q) \right] \right] \right\}. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Für den konstanten Lastanteil haben wir damit folgende Integrale:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{a/2}{a/\alpha} \int_0^{a/2} \int_0^{a/\alpha} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi m}{a} x \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\alpha\pi n}{a} y \right) dx \cdot dy = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2\alpha} \\
 & + \frac{a}{2} \int_0^{a/2} \int_0^{a/\alpha} \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{a} x (m-q) - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{a} x (m+p) \right] \cdot \\
 & - \frac{a}{2} \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\pi\alpha}{a} y (n-q) - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi\alpha}{a} y (n+q) \right] dx dy = 0.
 \end{aligned}$$

Es treten also nur Anteile bei den quadratischen Gliedern auf.

Für den periodischen Anteil haben wir als Integrale über x :

$$\begin{aligned}
 & + \frac{a}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{a} x - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{a} x \cdot \cos \frac{2m\pi}{a} x \right) dx \\
 & = -\frac{a}{4} \quad \text{für } m = k \\
 & = 0 \quad \text{für } m \neq k \\
 & + \frac{a}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{a} x (m-p) \cdot \cos \frac{2\pi k}{a} x - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{a} x (m+p) \cdot \cos \frac{2\pi k}{a} x \right] dx \\
 & = \begin{cases} +\frac{a}{4} & \text{für } m-p = 2k \\ -\frac{a}{4} & \text{für } m+p = 2k \\ 0 & \text{für } \left. \begin{matrix} m+p \\ m-p \end{matrix} \right\} \neq 2k \end{cases}
 \end{aligned}$$

Aus der Fourier-Reihe des Spannungsansatzes brauchen nur diejenigen Glieder mit den trigonometrischen Gliedern des Auslenkungsansatzes verknüpft werden, für die folgende Bedingung gilt:

bei den vollquadratischen Beiwerten: $k = m$

bei den gemischtquadratischen Beiwerten: $\begin{cases} 2k = m + p \\ 2k = m - p \end{cases}$

Für die Integration des periodischen Anteiles über y haben wir folgende Integrale:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{a}{\alpha}} e^{-\frac{2\pi k}{\alpha} y} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\alpha\pi n}{a} y \right) dy = \\ & \frac{1}{2} \left\{ \frac{a}{2\pi k} \left(-e^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} + 1 \right) - \frac{\frac{2\pi k}{a}}{\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{4\alpha^2 \pi^2 n^2}{a^2}} \left(-e^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} + 1 \right) \right\}; \\ & \int_0^{\frac{a}{\alpha}} y e^{-\frac{2\pi k}{\alpha} y} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\alpha\pi n}{a} y \right) dy = \\ & \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{a}{2\pi k} \right)^2 \left[e^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} \left(\frac{2\pi k}{a} + 1 \right) - 1 \right] - \frac{a}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi k}{\alpha}}}{\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{4\alpha^2 \pi^2 n^2}{a^2}} \left(-\frac{2\pi k}{a} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{-e^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} + 1}{\left(\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{4\alpha^2 \pi^2 n^2}{a^2} \right)^2} \left[\left(\frac{2\pi k}{a} \right)^2 - \left(\frac{2\alpha\pi n}{a} \right)^2 \right] \right\}; \\ & \int_0^{\frac{a}{\alpha}} e^{-\frac{2\pi k}{\alpha} y} \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha\pi}{a} y (n-q) - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha\pi}{a} y (n+q) \right] dy = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\frac{2\pi k}{a} \left(\pm e^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} + 1 \right)}{\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{a^2} (n-q)^2} - \frac{\frac{2\pi k}{a} \left(\pm e^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} + 1 \right)}{\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{a^2} (n+q)^2} \right\}; \\ & \int_0^{\frac{a}{\alpha}} y \cdot e^{-\frac{2\pi k}{\alpha} y} \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha\pi}{a} y (n-q) - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha\pi}{a} y (n+q) \right] dy = \\ & \frac{1}{2} \left\{ \pm \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{2\pi k}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi k}{\alpha}}}{\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{a^2} (n-q)^2} + \frac{\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} - \frac{\alpha^2 \pi^2}{a^2} (n-q)^2}{\left[\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{a^2} (n-q)^2 \right]^2} \left(\pm e^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} + 1 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{2\pi k}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi k}{\alpha}}}{\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{a^2} (n+q)^2} - \frac{\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} - \frac{\alpha^2 \pi^2}{a^2} (n+q)^2}{\left[\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{a^2} (n+q)^2 \right]^2} \left(\pm e^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} + 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Tafel 1

	A_{mn}^2	$A_{mn} A_{pq}$
σ_x	$-\frac{\nu \cdot P}{a \cdot d} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{4a} + \left(-\frac{a}{4}\right) \cdot \frac{e^{\frac{\pi k}{a}}}{2} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^3} \left[\left[c_{1k} + c_{2k} \left(2 + \frac{\pi k}{a} \right) \right] \right]_{m=k}$ $\left[\frac{a}{2\pi k} - \frac{N}{N} \right] - c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} \left[\frac{a^2}{4\pi^2 k^2} - \frac{4a^2 \pi^2 n^2}{a^2} - \frac{N^2}{N^2} \right]$	$\frac{\pi k}{a} \cdot \frac{e^{\frac{\pi k}{a}}}{4} \cdot \frac{2m p \pi^2}{2 \cdot a^2} \left[\left[c_{1k} + c_{2k} \left(2 + \frac{\pi k}{a} \right) \right] \right]$ $\left(\frac{2\pi k}{a} - \frac{2\pi k}{N'} \right) \cdot \left(\frac{2\pi k}{a} - \frac{2\pi k}{N''} \right)$ $- c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} \left[\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} - \frac{a^2 \pi^2}{a^2} (n-q)^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{a^2} - \frac{a^2 \pi^2}{a^2} (n+q)^2 \right] \frac{N'^2}{N'^2}$
σ_y	$-\frac{P}{a \cdot d} \cdot \frac{a^2 n^2 \pi^2}{4a} - \left(\frac{a}{4} \right) \cdot \frac{e^{\frac{\pi k}{a}}}{2} \cdot \frac{a^2 n^2 \pi^2}{a^3} \left[\left(c_{1k} + \frac{\pi k}{a} \cdot c_{2k} \right) \right]_{m=k}$ $\left[\frac{a}{2\pi k} + \frac{N}{N} \right] - c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} \left[\frac{a^2}{4\pi^2 k^2} + \frac{4a^2 \pi^2 n^2}{a^2} - \frac{N^2}{N^2} \right]$	$\frac{\pi k}{a} \cdot \frac{e^{\frac{\pi k}{a}}}{4} \cdot \frac{2a \pi^2 n q}{2 \cdot a^2} \left[\left(c_{1k} + \frac{\pi k}{a} \cdot c_{2k} \right) \right]$ $\left(\frac{2\pi k}{a} - \frac{2\pi k}{N''} \right) \cdot \left(\frac{2\pi k}{a} - \frac{2\pi k}{N'} \right)$ $- c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} \left[\frac{4\pi^2 k^2}{a^2} - \frac{a^2 \pi^2}{a^2} (n-q)^2 - \frac{4\pi^2 k^2}{a^2} - \frac{a^2 \pi^2}{a^2} (n+q)^2 \right] \frac{N'^2}{N'^2}$
$-\tau_{xy}$	$\frac{a m n \pi^2}{a^2} \cdot \frac{e^{\frac{\pi k}{a}}}{2} \cdot \left(\frac{a}{4} \right) \left[\left[c_{1k} + c_{2k} \left(1 + \frac{\pi k}{a} \right) \right] \right]_{m=k}$ $- c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} \cdot \frac{2a \pi n}{N^2} \left[\frac{a}{a} - \frac{N}{N} \right]$	$m+p=2k: + \frac{2\pi k}{a} \cdot \frac{a \pi}{a} \cdot \frac{a \pi}{a} (n+q) + \frac{2\pi k}{a} \cdot \frac{a \pi}{a} (n-q)$ $m-p=2k: + \frac{a}{a} \cdot \frac{a m p \pi^2}{a^2} \cdot \frac{e^{\frac{\pi k}{a}}}{2} \left[\left[c_{1k} + c_{2k} \left(1 + \frac{\pi k}{a} \right) \right] \right]$ $m-p=-2k: - \frac{2\pi k}{a} \cdot \frac{a \pi}{a} \cdot \frac{a \pi}{a} (n+q) + \frac{2\pi k}{a} \cdot \frac{a \pi}{a} (n-q)$ $- c_{2k} \cdot \frac{2\pi k}{a} \left[\frac{2\pi k}{a} \cdot \frac{a \pi}{a} (n+q) - \frac{2\pi k}{a} \cdot \frac{a \pi}{a} (n-q) \right] \frac{N'^2}{N'^2}$

Tafel 2

	$A_{m\ n}$	$A_{m\ n}\ A_{p\ q}$
$-\frac{\nu \cdot P}{a \cdot d} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{4 + a} \cdot \frac{\nu \cdot P}{a \cdot d} \cdot \frac{1}{8 k^3 \pi^3} + 1 \cdot \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{2 \pi k}{\lambda^3}$ $-1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{an}{k}\right)^2} + \frac{1 + \nu}{2 \nu} \left[1 - \frac{1 - \left(\frac{an}{k}\right)^2}{1 + \left(\frac{an}{k}\right)^2} \right]$	$m-p=2k: + \frac{2 m p \pi^2}{4} \cdot \frac{\nu P}{a \cdot d} \cdot \frac{1}{8 k^3 \pi^3} + 1 \cdot \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{2 \pi k}{\lambda^3} - \left[1 + \left[\frac{a(n-q)}{2k} \right]^2 \right] \frac{1}{1 + \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2}$ $m+p=2k: - \frac{1 + \nu}{2 \nu} \left(1 - \left[\frac{a(n-q)}{2k} \right]^2 \right) \frac{1 - \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2}{\left(1 + \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2 \right)}$	$m-p=2k: + \frac{2 m p \pi^2}{4} \cdot \frac{\nu P}{a \cdot d} \cdot \frac{1}{8 k^3 \pi^3} + 1 \cdot \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{2 \pi k}{\lambda^3} - \left[1 + \left[\frac{a(n-q)}{2k} \right]^2 \right] \frac{1}{1 + \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2}$ $m+p=2k: - \frac{1 + \nu}{2} \left(1 + \left[\frac{a(n-q)}{2k} \right]^2 \right) \frac{1 - \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2}{\left(1 + \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2 \right)}$
$-\frac{P}{a \cdot d} \cdot \frac{a^2 n^2 \pi^2}{4 + a} \cdot \frac{a^2 n^2 \pi^2}{4} \cdot \frac{1}{8 k^3 \pi^3} + 1 \cdot \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{2 \pi k}{\lambda^3}$ $1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{an}{k}\right)^2} + \frac{1 + \nu}{2} \left[1 + \frac{1 - \left(\frac{an}{k}\right)^2}{1 + \left(\frac{an}{k}\right)^2} \right]$	$m-p=2k: - \frac{2 a^2 \pi^2 n q}{4} \cdot \frac{P}{a \cdot d} \cdot \frac{1}{8 k^3 \pi^3} + 1 \cdot \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{2 \pi k}{\lambda^3} + \frac{1}{1 + \left[\frac{a(n-q)}{2k} \right]^2}$ $m+p=2k: + \frac{1 + \nu}{2} \left(1 + \left[\frac{a(n-q)}{2k} \right]^2 \right) \frac{1 - \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2}{\left(1 + \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2 \right)}$	$m-p=2k: + \frac{2 a^2 \pi^2 n q}{4} \cdot \frac{P}{a \cdot d} \cdot \frac{1}{8 k^3 \pi^3} + 1 \cdot \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{2 \pi k}{\lambda^3} + \frac{1}{1 + \left[\frac{a(n-q)}{2k} \right]^2}$ $m+p=2k: + \frac{1 + \nu}{2} \left(1 + \left[\frac{a(n-q)}{2k} \right]^2 \right) \frac{1 - \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2}{\left(1 + \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2 \right)}$
$\frac{a m n \pi^2}{4} \cdot \frac{P}{a \cdot d} \cdot \frac{1}{8 k^3 \pi^3} + 1 \cdot \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{2 \pi k}{\lambda^3}$ $\left[1 - \nu \cdot \frac{a n}{k} \cdot \frac{1 + \nu}{2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{an}{k}\right)^2} \cdot \frac{1 + \nu}{2} \cdot \frac{a n}{k} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{an}{k}\right)^2} \right]$	$m+p=2k: + \frac{a m q \pi^2}{4} \cdot \frac{P}{a \cdot d} \cdot \frac{1}{8 k^3 \pi^3} + 1 \cdot \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{2 \pi k}{\lambda^3} + \frac{1 - \nu}{2} \left[\frac{a(n+q)}{2k} + \frac{1}{1 + \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2} \right]$ $m-p=2k: + \frac{1 + \nu}{2} \left(1 + \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2 \right) \frac{2 a(n-q)}{2k} \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{a(n-q)}{2k} \right]^2}$ $m+p=-2k: - \frac{1 + \nu}{2} \left(1 + \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2 \right) \frac{2 a(n-q)}{2k} \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{a(n-q)}{2k} \right]^2}$	$m+p=2k: + \frac{a m q \pi^2}{4} \cdot \frac{P}{a \cdot d} \cdot \frac{1}{8 k^3 \pi^3} + 1 \cdot \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{2 \pi k}{\lambda^3} + \frac{1 - \nu}{2} \left[\frac{a(n+q)}{2k} + \frac{1}{1 + \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2} \right]$ $m-p=2k: + \frac{1 + \nu}{2} \left(1 + \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2 \right) \frac{2 a(n-q)}{2k} \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{a(n-q)}{2k} \right]^2}$ $m+p=-2k: - \frac{1 + \nu}{2} \left(1 + \left[\frac{a(n+q)}{2k} \right]^2 \right) \frac{2 a(n-q)}{2k} \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{a(n-q)}{2k} \right]^2}$
oberes Vorzeichen $n > q$ unteres Vorzeichen $n < q$	oberes Vorzeichen $n > q$ unteres Vorzeichen $n < q$	oberes Vorzeichen $n > q$ unteres Vorzeichen $n < q$

Wo zwei Vorzeichen übereinander stehen, gilt

das obere für $\begin{Bmatrix} n-q \\ n+q \end{Bmatrix}$ ungerade

das untere für $\begin{Bmatrix} n-q \\ n+q \end{Bmatrix}$ gerade

Für die Integration der Arbeitsanteile σ_y und τ_{xy} sind ähnliche Rechnungen durchzuführen. Die Ergebnisse sind in der Tafel 1 zusammengeschrieben. Dabei wird auch hier

von der Vereinfachung $e^{-\frac{2\pi k}{a}} \rightarrow 0$ Gebrauch gemacht.
In der Tafel gilt:

$$N = \frac{4\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{4\alpha^2 \pi^2 n^2}{a^2}$$

$$N' = \frac{4\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{a^2} (n+q)^2$$

$$N'' = \frac{4\pi^2 k^2}{a^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{a^2} (n-q)^2.$$

Die Konstanten nach den Gl. (18) eingeführt, liefert die vereinfachte Tafel 2, die der zahlenmäßigen Auswertung zugrundegelegt wird.

Mit Tafel 2 ist nach Berücksichtigung einer Erweiterung mit $d/2$ nach Gl. (23) der Wert der äußeren Arbeit gegeben. Gl. (25) liefert nach Erweiterung mit $N/2$ den Wert der inneren Arbeit bei einer Auslenkung $w = f(x, y)$. Der Augenblick des Ausbeulens ist ein Gleichgewichtszustand, so daß für ihn die Anwendung des Prinzips der virtuellen Ver-rückung verlangt, daß die äußere Arbeit gleich der inneren Arbeit sein muß. Daraus erhalten wir die kritische Beullast

$$P_{kr} = \frac{N}{a} \cdot \pi^2 \cdot \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \frac{1}{a} (m^2 + \alpha^2 n^2)^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} T} \quad (30)$$

oder

$$P_{kr} = K \cdot \frac{Z}{T}. \quad (31)$$

In diesem Ausdruck für die kritische Beullast sind nach dem *Ritzschen* Verfahren die Beiwerte A_{ik} so zu bestimmen, daß sie die gesamte Formänderungsarbeit nach Gl. (23) zu einem Minimum machen. Wir haben also nach Gl. (25) und Tafel 2 in Gl. (23) einzusetzen und nach den Beiwerten A_{ik} zu differenzieren. Führen wir diese Operation mit der Gl. (31) durch, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \delta P &= \frac{K}{T^2} (T \cdot \delta Z - Z \cdot \delta T) \\ \delta P &= \frac{K}{T} \left(\delta Z - \frac{P}{K} \delta T \right) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Z und T sollen so gewählt werden, daß P ein Minimum wird. Das liefert die Bedingungs-gleichung

$$\frac{\delta Z}{\delta A_{ik}} - \frac{P}{K} \cdot \frac{\delta T}{\delta A_{ik}} = 0. \quad (33)$$

Z und T sind homogen quadratisch in den Beiwerten A_{ik} , so daß die Gl. (33) homogen linear in den A_{ik} werden. Diese Gleichungen liefern nur dann einen von Null verschied-

denen Wert für die A_{ik} , wenn die Nennerdeterminante des Gleichungssystems Null ergibt. Diese Bedingung führt zur Bestimmung der kritischen Beullast. Wie dabei vorzugehen ist, zeigt das nachfolgende Beispiel.

4. Zahlenmäßige Auswertung der Ansätze

Wir schreiten jetzt an die Bestimmung der kritischen Beullast eines quadratischen Stegblechfeldes mit $\alpha = 1$. Die Querdrehungszahl wird mit $\nu = 1/3$ angenommen. Als Auslenkungsansatz wird nach Gl. (24) eine trigonometrische Funktion mit vier Freiwerten gewählt.

$$w = \left(A_{11} \cdot \sin \frac{\alpha \pi}{a} y + A_{12} \cdot \sin \frac{2 \alpha \pi}{a} y \right) \cos \frac{\pi}{a} x + \left(A_{31} \cdot \sin \frac{\alpha \pi}{a} y + A_{32} \cdot \sin \frac{2 \alpha \pi}{a} y \right) \cos \frac{3 \pi}{a} x \quad (34)$$

Für die Ermittlung der äußeren Arbeit ist Tafel 2 auszuwerten, was folgende Zahlenwerte ergibt:

$$A_a = - \frac{d}{2} \cdot \frac{P}{a \cdot d} \cdot \frac{\pi^2}{4} \left[1,8265 \cdot A_{11}^2 + 5,5306 \cdot A_{12}^2 + 4,0486 \cdot A_{32}^2 + 7,1416 \cdot A_{32}^2 + 2 \cdot A_{11} \cdot A_{12} \cdot 0,4339 + 2 \cdot A_{31} \cdot A_{32} \cdot 0,1069 + 2 \cdot A_{11} \cdot A_{31} \cdot 0,7972 + 2 \cdot A_{12} \cdot A_{32} \cdot 1,2393 + 2 A_{11} \cdot A_{32} \cdot 0,8907 + 2 \cdot A_{12} \cdot A_{31} \cdot 0,4871 \right] \quad (35)$$

Für die innere Arbeit errechnet sich nach den Gl. (23) und (25)

$$A_i = \frac{\pi^4}{a^2} \cdot \frac{N}{8} (4 A_{11}^2 + 25 A_{12}^2 + 100 A_{31}^2 + 169 A_{32}^2). \quad (36)$$

Die abgeleiteten Gl. (35) und (36) in Gl. (33) eingesetzt, liefert ein System homogener linearer Gleichungen mit der folgenden Nennerdeterminante.

A_{11}	A_{12}	A_{31}	A_{32}
$k \cdot 1,8265 - 4$	$k \cdot 0,4339$	$k \cdot 0,7972$	$k \cdot 0,8907$
$k \cdot 0,4339$	$k \cdot 5,5306 - 25$	$k \cdot 0,4871$	$k \cdot 1,2393$
$k \cdot 0,7972$	$k \cdot 0,4871$	$k \cdot 4,0486 - 100$	$k \cdot 0,1069$
$k \cdot 0,8907$	$k \cdot 1,2393$	$k \cdot 0,1069$	$k \cdot 7,1416 - 169$

(37)

mit $k = \frac{a \cdot P}{\pi^2 \cdot N}$.

Einen ersten Beullastwert liefert bereits die Forderung, daß die gesamte Formänderungsarbeit nach Gl. (23) gleich Null werden muß. Wird in Gl. (34) nur der Beiwert A_{11} beibehalten, so genügt diese Forderung zur Bestimmung eines ersten Beulwertes. Aus den Gl. (35) und (36)

$$P_{kr} = 2,1900 \pi^2 \cdot \frac{N}{a}. \quad (38)$$

Eine bessere Näherung liefert ein Ansatz, der zwei Beiwerte enthält. In diesem Falle bestimmt sich der kritische Beulwert aus folgender quadratischen Gleichung:

$$(1,8265 - 4k)(5,5306 - 25k) = 0,4839^2. \quad (39)$$

Sie liefert den Wert

$$P_{kr} = 2,1652 \cdot \pi^2 \frac{N}{a}. \quad (40)$$

Die vollständige Lösung der Determinante (37) ergibt sich aus einer Gleichung 4. Grades. Die kleinste Wurzel findet man am besten durch Probieren. Für einen geschätzten k -Wert rechnen wir die Determinante aus und verändern den Wert so lange, bis die Determinante den Wert Null ergibt. Diese Berechnung erfolgt zweckmäßig mit dem Gaußschen Algorithmus¹⁾.

Als Lösung der Determinante (37) erhalten wir

$$P_{kr} = 2,1202 \cdot \pi^2 \frac{N}{a}. \quad (41)$$

Vergleicht man die Ergebnisse der Gl. (38), (40) und (41), so sieht man, daß das Ergebnis der Gl. (38) schon eine recht brauchbare Näherung darstellt. Das überrascht eigentlich, denn die Auslenkung ist in diesem Falle gegeben durch den einfachen Ansatz

$$w = \cos \frac{\pi}{a} x \cdot \sin \frac{a\pi}{a} y \quad (42)$$

und die Spannungen zwischen Gurt und Stegblech durch den Ansatz

$$\sigma_{y0} = -\frac{P}{a \cdot d} \left(1 + \frac{2}{\frac{8\pi^3}{\lambda^3} + 1} \cdot \cos \frac{2\pi}{a} x \right). \quad (43)$$

Das ist eine gleichförmige Verteilung mit einer überlagerten cos-Verteilung, die doch ziemlich von der genauen Verteilung nach der Abb. 5 abweicht. Wenn auf S. 9 als vereinfachende Annahme angesetzt wurde, daß sich die Spannungsverteilung nach Abb. 5 genau über die Länge a des Beulfeldes erstrecken soll, so dürfen wir jetzt annehmen, daß diese Voraussetzung gar nicht von so großer Bedeutung für das Ergebnis ist. Wenn schon eine so genäherte Spannungsverteilung, wie sie Gl. (43) darstellt, ein so gutes Ergebnis liefert, dann kommt es augenscheinlich in erster Linie auf die Größe von P an und weit weniger auf die Art der Verteilung dieser Last durch die Gurtsteifigkeit.

5. Beuluntersuchung für örtliche Lasteinleitung bei gleichzeitiger Biegebeanspruchung

In der bisherigen Berechnung haben wir allein den Einfluß der örtlichen Lasteinleitung berücksichtigt. Aber wenn beispielsweise eine Kranlast auf dem Obergurte eines Kran-

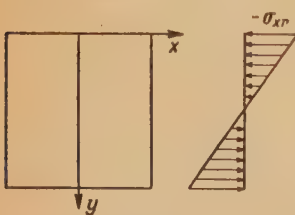


Bild 7.

bahnträgers rollt, dann kommen zu den Spannungen aus der örtlichen Lasteinleitung noch die Spannungen aus der Gesamtträgerwirkung hinzu, die im Träger Biege- und Schubspannungen hervorruft.

Es soll nun ein Fall untersucht werden, wo den Spannungen aus der örtlichen Lasteinleitung noch Biegespannungen überlagert werden. Dabei wird die Querkraft über die Länge a des Trägerfeldes gleich Null gesetzt, d. h. $\sigma_{xr} = \text{konstant}$. Nach Abb. 7 ist

¹⁾ Beyer, K.: Die Statik im Eisenbetonbau S. 218. Berlin 1933.

$$\sigma_x = -\sigma_{xr} \left(1 - \frac{2a}{a} y\right). \quad (44)$$

Zunächst soll die Wirkung der Biegespannung allein untersucht werden. Für die äußere Arbeit erhalten wir mit den Gl. (23), (24) und (44)

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_0^{a/\alpha} \sigma_x \cdot w_x^2 dx dy = \sigma_{xr} \int \int \left(1 - \frac{2a}{a} y\right) \\ & \left[\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot A_{mn}^2 \cdot \sin^2 \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin^2 \frac{\alpha \pi n}{a} y \right. \\ & \left. + \frac{2mp\pi^2}{a^2} \cdot A_{mn} A_{pq} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{p\pi}{a} x \cdot \sin \frac{\alpha n \pi}{a} y \cdot \sin \frac{\alpha q \pi}{a} y \right] dx dy \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Die Integration der vollquadratischen Glieder ergibt Null, da die Spannung eine ungerade und die Auslenkung eine gerade Funktion in y ist. Die Integration der gemischtquadratischen Glieder ergibt nur Werte für $m=q$. Wir erhalten

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-a/2}^{+a/2} \sigma_x \cdot w_x^2 \cdot dx dy = \sigma_{xr} \int \int \left(1 - \frac{2a}{a} y\right) \\ & \cdot \frac{2m^2 \pi^2}{a^2} A_{mn} \cdot A_{pq} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2m\pi}{a} x \right) \\ & \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha \pi}{a} (n-q)y - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha \pi}{a} (n+q)y \right] dx \cdot dy. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Integral = 0 für $n \pm q = \text{gerade}$

$$\text{Integral} = \sigma_{xr} \cdot 2 A_{mn} \cdot A_{mq} \cdot m^2 \cdot \frac{4nq}{(n^2 - q^2)^2}$$

für $n \pm q = \text{ungerade}$

Die äußere Arbeit ist damit nach Gl. (23)

$$A_a = \frac{d}{2} \cdot \sigma_{xr} \cdot 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_{mn} \cdot A_{mq} \cdot m^2 \cdot \frac{4nq}{(n^2 - q^2)^2} \quad (47)$$

dabei $n \pm q = \text{ungerade}$

Mit dem Auslenkungsansatz der Gl. (34)

$$A_a = \frac{d}{2} \cdot \sigma_{xr} (2 A_{11} \cdot A_{12} \cdot 0,8889 + 2 \cdot A_{31} \cdot A_{32} \cdot 8,0000). \quad (48)$$

Für die innere Arbeit bleibt Gl. (36) bestehen.

Die Nennerdeterminante des Gleichungssystems, das durch die Ableitung der Formänderungsarbeit nach den Beiwerten A_{mn} entsteht, lautet mit

$$z = \frac{1}{\sigma_{xr}} \cdot \frac{N}{4} \cdot \frac{\pi^4}{d \cdot a^2} \quad (49)$$

A_{11}	A_{12}	A_{31}	A_{32}
$z \cdot 4,00$	0,8889	—	—
0,8889	$z \cdot 25,00$	—	—
—	—	$z \cdot 100,00$	8,00
—	—	8,00	$z \cdot 169,00$

Diese Determinante läßt sich aufspalten in zwei Unterdeterminanten, so daß die kleinste Lösung allein durch die Gleichung

$$100 z^2 = 0,8889^2$$

mit der Lösung

$$z = 0,08889 \quad (50)$$

bestimmt ist.

Die Verwölbung über x ist einfach cos-förmig. Die Beulspannung wird erhalten zu

$$\sigma_{x r k r} = \frac{N}{a^2 \cdot d} \cdot 273,96. \quad (51)$$

Der genauere Beulwert ist nach DIN 4114 gleich 239,0 und wird gefunden durch Vermehrung der Glieder A_{1n} im Ansatz (34).

Wirken nun gleichzeitig die örtliche Lasteinleitung und die Biegespannung, dann erhalten wir mit $k = \frac{a \cdot P}{\pi^2 \cdot N}$ und z nach Gl. (49) folgende Bestimmungsdeterminante

A_{11}	A_{12}	A_{31}	A_{32}
$k \cdot 1,8265 - 4,0$	$k \cdot 0,4339$ $+ 0,8889 \cdot \frac{1}{z}$	$k \cdot 0,7972$	$k \cdot 0,8907$
$k \cdot 0,4339$ $+ 0,8889 \cdot \frac{1}{z}$	$k \cdot 5,5306 - 25$	$k \cdot 0,4871$	$k \cdot 1,2393$
$k \cdot 0,7972$	$k \cdot 0,4871$	$k \cdot 4,0486 - 100$	$k \cdot 0,1069$ $+ 8,00 \cdot \frac{1}{z}$
$k \cdot 0,8907$	$k \cdot 1,2393$	$k \cdot 0,1069$ $+ 8,00 \cdot \frac{1}{z}$	$k \cdot 7,1416 - 169$

Die Lösungen der Determinante beschreiben mit den Werten k und z eine Kurve in einem Koordinatensystem, das auf der einen Achse die kritischen Beulwerte P_{kr} der örtlichen Lasteinleitung und auf der anderen Achse die kritische Biegespannung σ_b anzeigt. Die Kurve schneidet die P_{kr} -Achse nach Gl. (41) und die σ_b -Achse nach

(Gl. 51). Ihr weiterer Verlauf bestimmt die Beulwerte für alle möglichen Kombinationen von P_{kr} und σ_b . Vergleiche dazu Abb. 8.

Um den Verlauf dieser Kurve zu finden, lösen wir die Determinante (52) für das Beispiel

$$a = 100 \text{ cm}, d = 1 \text{ cm}, \sigma_b = 2,4 \text{ t/cm}^2$$

$$N = \frac{2100}{12 \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)} = 196,875 \text{ t/cm}.$$

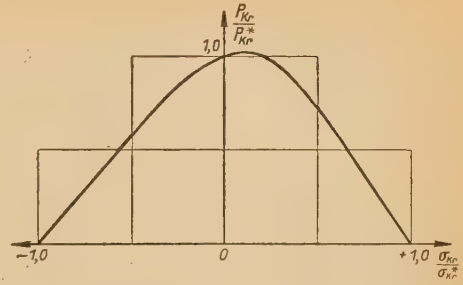


Bild 8.

Nach Gl. (49)

$$\frac{1}{z} = 5,0059.$$

Die Determinante (52) lautet damit

A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	(53)
$k \cdot 1,8265 - 4,0$	$k \cdot 0,4339$ $- 4,4497$	$k \cdot 0,7972$	$k \cdot 0,08907$	
$k \cdot 0,4339$ $- 4,4497$	$k \cdot 5,5306 - 25$	$k \cdot 0,4871$	$k \cdot 1,2393$	
$k \cdot 0,7972$	$k \cdot 0,4871$	$k \cdot 4,0486 - 100$	$k \cdot 0,1069$ $- 40,0472$	
$k \cdot 0,8907$	$k \cdot 1,2393$	$k \cdot 0,1069$ $- 40,0472$	$k \cdot 7,1416 - 169$	

Lösen wir sie zunächst näherungsweise für die Beiwerte A_{11} und A_{12} , so erhalten wir aus der quadratischen Gleichung

$$(k \cdot 1,8265 - 4,0) \cdot (k \cdot 5,5306 - 25) = (k \cdot 0,4339 - 4,4497)^2 \quad (54)$$

den Wert

$$k = 1,706$$

der nach Gl. (37) eine kritische Beullast liefert von

$$P_{kr} = 33,15 \text{ t.} \quad (55)$$

Die vollständige Lösung liefert den Wert

$$K = 1,697$$

der eine kritische Beullast liefert von

$$P_{kr} = 32,974 \text{ t.} \quad (56)$$

Die Verbesserung gegenüber Gl. (55) ist nur geringfügig.

In gleicher Weise sind weitere Beispiele durchgerechnet und die Ergebnisse in Abb. 8 aufgetragen. Diese Kurve deckt dabei im Rahmen der zeichnerischen Genauigkeit die berechneten quadratischen Blechfelder mit den Abmessungen

$$a = 100 \text{ cm}, d = 1 \text{ cm}$$

$$a = 200 \text{ cm}, d = 2 \text{ cm}$$

$$a = 150 \text{ cm}, d = 1 \text{ cm}$$

Das Verhältnis $\frac{a}{d}$ ist demnach ohne nennenswerten Einfluß.

Die Auftragung der Ergebnisse ist dimensionslos vorgenommen, so daß die verschie-

denen kritischen Werte aus der örtlichen Last P_{kr} und der Biegespannung σ_{kr} bezogen sind auf die kritischen Werte für eine allein wirkende örtliche Last P_{kr} und eine allein wirkende Biegespannung σ_{kr} . Die Abb. 8 berücksichtigt die Fälle Druck sowie auch Zug am Stegblechoberrande. Sie enthält eine erkennbare Ungenauigkeit, da der kritische Biegespannungswert mit 272,96 gegenüber dem Werte nach der DIN 4114 von 239,0 bestimmt worden ist.

6. Zusammenfassung

Im vorstehenden sind drei technisch verwertbare Ergebnisse enthalten. Zunächst geben die Gl. 20 und Abb. 5 Aufschluß über die Spannungsverteilung zwischen Gurt und Steg bei I-Querschnitten. Die Spannungsverteilung ist hier unter der Annahme einer stetigen Verbindung von Gurt und Steg abgeleitet und gilt in dieser Form für Walz- und Schweißprofile. Aber auch für genietete Blechträger dürfte die berechnete Spannungsverteilung eine brauchbare Bemessungsgrundlage für die Halsniete liefern und jedenfalls brauchbarer sein als die nicht ganz begründete Angabe der DIN 120, Berechnungsgrundlagen für die Stahlbauteile von Kranen und Kranbahnen, Blatt 1, § 21, wo die Lastverteilungslänge abhängig von der Höhe zwischen der Nietreihe und der Schienenoberkante gemacht ist. Da wahrscheinlich das Bedürfnis entstehen wird, hier auf die Gl. (20) zurückzugreifen, empfiehlt es sich, die für die Anwendung etwas unbequeme Form einer Reihensummierung durch eine geschlossene Funktion zu ersetzen, was sehr gut durch folgenden Ansatz geschehen kann:

$$\sigma_y = - \frac{P}{r \cdot d} \cdot \frac{4,13 r^4}{(x^2 + 3,28 r^2)^2} \quad (57)$$

Nach Gl. (17) mit $\nu = \frac{1}{3}$

$$r = 1,212 \sqrt[3]{\frac{J}{d}} \quad (58)$$

J = Trägheitsmoment des Gurtes und d = Stegblechstärke.

Für den Fall des Walz- und Schweißprofiles fragt man nach der maximalen Spannung, die unter der Last für $x = 0$ auftritt und somit durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\sigma_y^* = - \frac{P}{r \cdot d} \cdot 0,384. \quad (59)$$

Für Blechträgerprofile läßt sich folgende Näherungsformel ableiten. Der Nietabstand sei e ; die Spannung bei $x = \frac{e}{2}$ ist

$$\sigma_y = - \frac{P}{r \cdot d} \cdot \frac{66,08}{\left[\left(\frac{e}{r} \right)^2 + 13,12 \right]^2} \quad (60)$$

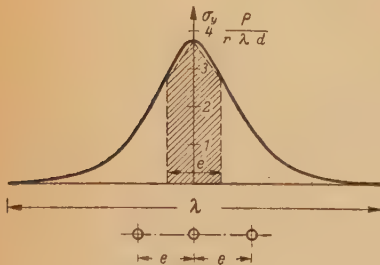


Bild 9.

Mit Abb. 9 nehmen wir eine geradlinige Spannungsabnahme vom Spitzenwert aus an und belasten den Niet mit der schraffierten Fläche. Er muß demnach eine Kraft aus dem Gurt auf das Stegblech übertragen von

$$N = - P \cdot \frac{e}{r} \left\{ 0,192 + \frac{33,04}{\left[\left(\frac{e}{r} \right)^2 + 13,12 \right]^2} \right\} \quad (61)$$

Die Anwendung der oben aufgeführten Gleichungen sei an Beispielen erläutert.

Ein Kranbahnträger bestehe aus einem IP 32 mit einer aufgelegten, durch Hakensrauben befestigten Kranschiene KS 56. Wir haben dann:

$$\begin{aligned} d &= \text{Stegstärke} = 1,3 \text{ cm} \\ b &= \text{Gurtbreite} = 30 \text{ cm} \\ t &= \text{Gurtstärke} = 2,2 \text{ cm} \\ J_S &= \text{Trägheitsmoment der Kranschiene} = 545 \text{ cm}^4 \\ J_G &= \text{Trägheitsmoment des IP 32} = \frac{30 \cdot 2,2^2}{12} = 26,62 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Die Verbindung zwischen IP 32 und Kranschiene soll nicht schubfest sein. Eine an anderer Stelle¹⁾ durchgeführte Untersuchung zeigt, daß in diesem Fall statt mit Gl. (58) in die Ansätze mit

$$r = \sqrt[3]{\frac{2J}{d}} = 1,26 \sqrt[3]{\frac{J}{d}} \quad (62)$$

einzugehen ist. Das bedeutet nur eine geringfügige Änderung, die hier wie im allgemeinen vernachlässigt werden kann. Wir können dann die Trägheitsmomente von Gurt und Kranschiene addieren und erhalten nach Gl. (60)

$$r = 1,212 \sqrt[3]{\frac{572}{1,3}} = 9,22 \text{ cm.} \quad (63)$$

Der Einfluß der örtlichen Lasteinleitung erstreckt sich demnach auf ungefähr

$$l = \lambda \cdot r = 10 \cdot 9,24 = 92,2 \text{ cm.}$$

Für die größte Spannung liefert Gl. (59)

$$\sigma_y^* = -P \cdot 0,032.$$

Bei einem St. 37 mit einer Fließgrenze von $\sigma_F = 2,4 \text{ t/cm}^2$ würde Fließen eintreten bei einer Belastung mit $P = -74,91 \text{ t}$. Wenn durch eine einwandfreie Nietung eine schubfeste Verbindung zwischen Obergurt und Kranschiene geschaffen werden kann, darf in die Gl. (58) mit dem Trägheitsmoment des Gesamtprofils Obergurt + Kranschiene eingegangen werden, was zu einer wesentlich günstigeren Spannungsverteilung führt.

In Abb. 10 ist ein Kranbahnträger als Blechprofil dargestellt. Die Verbindung der Kranschiene mit dem Obergurt erfolgt durch Nietung, so daß in diesem Falle das Trägheitsmoment des Gesamtprofils in Rechnung zu stellen ist.

Wir haben damit

$$r = 1,212 \sqrt[3]{\frac{2510}{1,2}} = 15,5 \text{ cm}$$

und $l = 155 \text{ cm}$.

Für einen Nietabstand $e = 10 \text{ cm}$ liefert Gl. (62) eine Nietkraft bei $\frac{e}{r} = 0,645$ von

$$\begin{aligned} N &= -P \cdot 0,645 \left[0,192 + \frac{33,04}{(0,645^2 + 13,12)^2} \right] \\ &= -P \cdot 0,240 \text{ t.} \end{aligned}$$

Bei den üblichen Bauausführungen gilt $\frac{e}{r} \leq 1$, womit das Glied $\left(\frac{e}{r}\right)^2$ im Nenner gegenüber dem Werte 13,12 vernachlässigt und genau genug gesetzt werden kann:

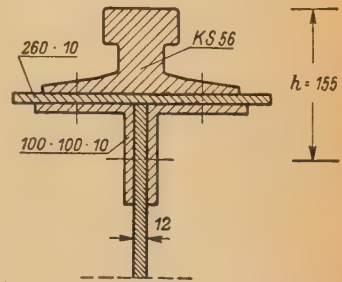


Bild 10.

¹⁾ Rieve: a. a. O.

$$N = -P \cdot \frac{e}{r} \cdot 0,384. \quad (64)$$

in unserem Beispiel dann

$$N = -P \cdot 0,248 \text{ t.}$$

Nach der DIN 120 würde die Rechnung folgendermaßen aussehen:

$$l = 2 \cdot h + 5 = 36 \text{ cm.}$$

Demnach sind $\frac{l}{e} \approx 3,5$ Niete an der Lasteinleitung beteiligt und

$$N = -P \cdot 0,286 \text{ t.}$$

Der Wert stimmt verhältnismäßig gut mit dem Ergebnis der genaueren Rechnung überein. Als ein weiteres Ergebnis haben wir mit Gl. (41) die kritischen Beullasten für eine örtliche Lasteinleitung. Diese Lasten hängen nach Gl. (41) ab vom Werte N , was auch dem Werte d^3 entspricht, und von der Beulfeldlänge a . Das d^3 im Zähler entsteht folgendermaßen: d^2 erscheint bei allen Beulaufgaben als Vertreter der Plattensteifigkeit; ein weiteres d erscheint aus der Spannungsverteilung, wo die örtliche Auflast durch die Stegstärke zu dividieren ist. Zum Werte a im Nenner ist folgendes zu bemerken: Der Berechnung wurde ein quadratisches Beulfeld zugrundegelegt, bei dem die Feldlänge a ungefähr mit der Einflußlänge $l = \lambda \cdot r$ der örtlichen Lasteinleitung übereinstimmt. Da kaum anzunehmen ist, daß sich die Beulauflenkung über eine größere Länge erstreckt als die Spannungsverteilung, kann diese einengende Voraussetzung für Beulfelder mit $a > l$ dahingehend beseitigt werden, daß in solchen Fällen mit dem Werte l anstatt mit a in Gl. (41) einzugehen ist. Für Fälle, wo die Stegaussteifungen in den Bereich der lokalen Spannungsstörung fallen, also $l > a$ ist, wird man zweckmäßig so verfahren: Sind die Aussteifungen gegen den Obergurt eingepaßt, dann entlasten sie bei ihrer Lage innerhalb der lokalen Spannungsstörung sicherlich so stark, daß es gerechtfertigt erscheint, mit dem Werte a der Beulfeldbreite in Gl. (41) einzugehen. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, dann empfiehlt es sich, den Wert l in Gl. (41) einzusetzen, womit ungünstiger gerechnet wird, als es den wirklichen Gegebenheiten entspricht.

Bezüglich der Beulfelderform ist folgendes zu sagen: Nach S.6 sollte als Voraussetzung für die Näherungsausdrücke der Spannungen gelten $\alpha = \frac{a}{b} \leq \sim 1$. Die Beulfelder wären nach dieser Voraussetzung höher als breit. Für $\alpha > 1$ wird vorgeschlagen, stets mit der Feldbreite a bzw. mit der Lasteinleitungslänge l entsprechend dem oben Gesagten in Gl. (41) einzugehen. Die Rechnungsergebnisse werden dann auf der sicheren Seite liegen.

Die Beullasten sind die kritischen Werte, wonach dann die zulässigen Lasten durch Begrenzung mit einem passenden Sicherheitswert v festzusetzen sind. In Anlehnung an die DIN 4114 empfiehlt sich $v = 1,5$ zu wählen.

Beispiel: Wir berechnen die Beullasten des Blechträgers nach Abb.10 und nehmen dabei eine Stegblechhöhe von 150 cm an. Für die Plattensteifigkeit errechnet sich

$$N = \frac{2100 \cdot 1,2^3}{12 \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)} = 340,20 \text{ t/cm.}$$

Sind keine Stegaussteifungen vorhanden oder liegen die Stegaussteifungen weiter auseinander als die oben berechnete Lasteinleitungslänge $l = 155 \text{ cm}$, dann liefert Gl. (43)

$$P_{kr} = \frac{340,20}{155} \cdot 2,1202 \cdot \pi^2 = 45,93 \text{ t.}$$

Die zugehörige Last beträgt dann

$$\dot{P}_{zul} = \frac{45,93}{1,5} = 30,62 \text{ t.}$$

Bei nicht eingepaßten Stegaussteifungen wird dieses Ergebnis beibehalten für Werte $l > s$, wo s Abstand der Stegaussteifungen bedeutet. Bei eingepaßten Stegaussteifungen wird mit s in Gl. (41) eingegangen.

Die Gl. (41) nimmt an, daß das Stegblech allein durch die örtliche Lasteinleitung in Spannung versetzt wird. In der Regel überlagert sich dieser Spannungszustand aber einem Biegespannungs- oder Schubspannungszustand aus der Gesamtträgerwirkung von Stützung zu Stützung. Abb. 8 berücksichtigt nun den Fall einer örtlichen Last mit einem gleichzeitig wirkenden Biegemoment, das dabei positiv oder negativ sein kann. Die dargestellte Schaulinie zeigt auch hier die kritischen Beulwerte, gegen die die zulässigen Werte mit einer Sicherheit $\nu = 1,5$ abzusetzen sind.

Das geschieht in folgender Weise¹⁾. Sind z. B. die örtliche Last mit P_1 und die Biege- und Schubspannungen mit σ_1 bei bekannten Tragwerksabmessungen gegeben, dann werden zunächst die kritischen Beulwerte P_{kr}^* für rein örtliche Lasteinleitung und σ_{kr}^* für reine Biegung bestimmt. Aus diesen Werten errechnet man dann die dimensionslosen Spannungsgrößen

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{kr}^*} = \xi \quad \text{und} \quad \frac{P_1}{P_{kr}^*} = \eta, \quad \text{die im Schaubild} \quad \frac{P_{kr}}{P_{kr}^*} = f\left(\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{kr}^*}\right)$$

nach Abb. 8 einen Punkt R festlegen, wie es in Abb. 11 gezeigt ist. Wenn angenommen wird, wie es im allgemeinen den Gegebenheiten entspricht, daß die Biegespannung und lokale Spannungsstörung zu derselben Lastgruppe gehören und σ_1 im selben Maße wie P_1 wächst, dann wird sich der Punkt R bei einer Laststeigerung in Richtung des Radiusvektors vom Ursprung hinweg bewegen. Erreicht R die Kurve ABC im Punkte R' , so tritt Ausbeulen ein. Die zulässige Belastung ist demnach gegen diesen Wert mit der Sicherheit $\nu = 1,5$ abzusetzen, was zum Punkte R'' führt. Solcherart kann zur ganzen Kurve ABC eine entsprechende Kurve DEF gezeichnet werden, die den Bereich der

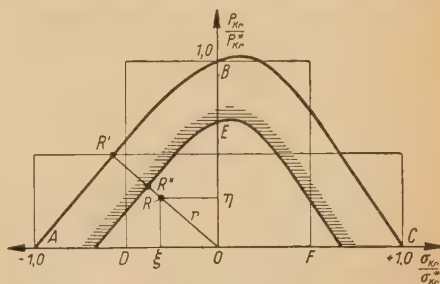


Bild 11.

zulässigen Belastungen abgrenzt mit der Forderung $\frac{\vec{OR'}}{\vec{OR''}} = 1,5$.

Beispiel: Der Blechträger nach Abbildung 10 habe Feldabmessungen zwischen den Halsnietreihen von $b = 155$ cm und den Aussteifungen von $s = 155$ cm. Die Lasteinleitungslänge wurde weiter oben ebenfalls zu $l = 155$ cm berechnet, so daß die Voraussetzungen der Ableitungen genau erfüllt sind. Die kritische Last P_{kr}^* ergab sich zu $P_{kr}^* = 45,93$ t. Die kritische Biegespannung erhalten wir nach Gl. (51) mit $N = 340,20$ tm zu

$$\sigma_{kr}^* = \frac{340,20}{155^2 \cdot 1,2} \cdot 273,96 = 3,233 \text{ t/cm}^2.$$

Die genauere Rechnung nach DIN E 4114²⁾ liefert

$$\sigma_{kr}^* = \frac{340,20}{155^2 \cdot 1,2} \cdot 239 = 2,820 \text{ t/cm}^2.$$

¹⁾ siehe auch Chwalla, Erläuterungen zur DIN E 4114, 2. Teil, S. 14.

²⁾ Die gesamte Berechnung unterscheidet sich gegenüber der DIN E 4114 in geringfügigem Maße dadurch, daß hier überall $\nu = 1/3$ gegenüber $\nu = 0,3$ in der DIN gesetzt wurde.

Für die weitere Rechnung beziehen wir uns auf diesen letzteren Wert.

Gegeben sei nun eine Belastung mit $P_1 = 20,0 \text{ t}$ und $\sigma_1 = -0,90 \text{ t/cm}^2$ als Druckspannung unter der Wirkung eines positiven Momentes. Die dimensionslosen Spannungsgrößen sind dann

$$\xi = -\frac{0,90}{2,82} = -0,319 \text{ und } \eta = \frac{20,0}{75,37} = 0,266.$$

Diese Werte liefern den Punkt R in Abb. 11, der innerhalb der Grenzkurve DEF liegt, was beweist, daß eine ausreichende Beulsicherheit vorhanden ist.

7. Versuche

Von der Behörde Strom und Hafen der Hansestadt Hamburg wurden im Juni 1948 Versuche¹⁾ durchgeführt, die so ausgewertet werden können, daß sie die Zusammenhänge versuchsmäßig beleuchten, die im Vorstehenden rechnerisch behandelt wurden.

Versuch 1

Ein 62 cm langes Trägerstück eines IP 32 wurde auf einen Versuchstisch statt aufgelegt und dann an der Oberflanschenmitte durch einen Stempel der Presse gedrückt (siehe Bild 12). Am Trägersteg waren die Meßstellen 1—10 angebracht. Davon waren 1, 2, 3, 6, 7, 8 2 cm lange, 4, 5, 9, 10 10 cm lange Meßseiten nach der Bauart Maihak. Alle Meßstrecken lagen senkrecht, so daß mit ihnen die Spannung σ festgestellt wurde. Die Markierung in Bild 12 bezieht sich auf die Mitten der Meßstrecken. Der Träger war aus St. 52. In Bild 13 sind die Meßergebnisse für verschiedene Laststufen aufgetragen und in der Tafel 3 angeschrieben, wo sie verglichen werden mit berechneten Werten, die sich ergeben nach dem Ansatz

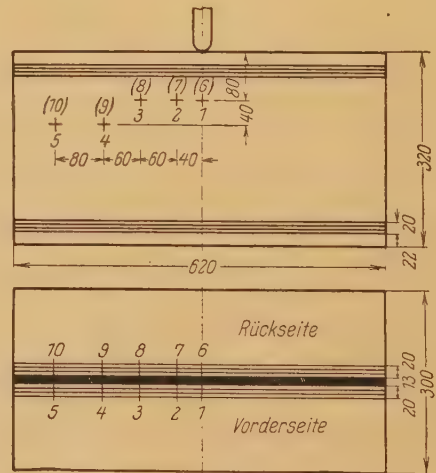


Bild 12.

$$\sigma_y = \frac{-2P}{r \cdot \lambda \cdot h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \pi^3 + 1} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{n\pi}{l} y \right) e^{-\frac{n\pi}{l} y} \cos \frac{n\pi}{l} x \quad n = 1, 3, 5 \dots$$

Dieser Ansatz gilt für die Halbebene mit Gurt und ist in dem Aufsatz in der ZAMM abgeleitet. Für die Auswertung ist als Gurt der Flansch zuzüglich des Teiles des Steges, der zwischen den Ausrundungsradien liegt, eingesetzt. Die Ordinate y zählt vom Flanschinnenrande. Alle Rechnungen sind mit dem Rechenschieber durchgeführt und es sind nur die Glieder $n = 1$ bis 9 in der obigen Gleichung berücksichtigt.

Bild 13 zeigt einen großen Unterschied zwischen den Messungen an der Vorder- und Rückseite, so daß offenbar die Lasteintragung Biegung im Steg hervorgerufen hat. Die

¹⁾ Die Versuchsergebnisse sind mir von Herrn Dipl.-Ing. J. Commentz mitgeteilt worden, dem ich an dieser Stelle für die Überlassung meinen Dank aussprechen möchte. Der eigentliche Zweck der Versuche war, die Tragfähigkeit der IP 32 als Kranbahnträger eines schweren Portalkranes zu ermitteln.

waagerechte Strecke der Linienzüge bei der Laststufe 30,4 t entstand dadurch, daß hier vollständig entlastet wurde und dann wieder mit 30,4 t belastet. Für die Tafel 3 sind die Mittelwerte aus den Messungen an der Vorder- und Rückseite gebildet.

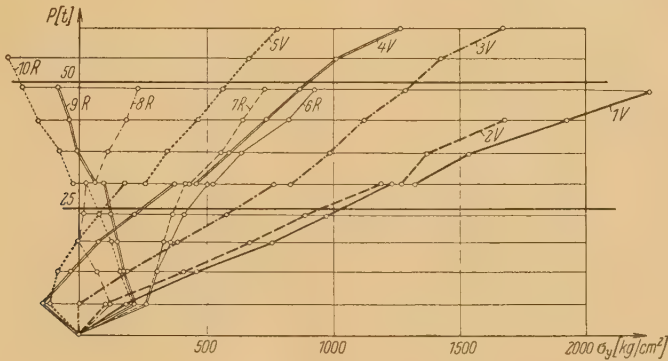


Bild 13.

Tafel 3. Spannung σ_y [t/cm²]

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	$x =$		0		4		10		16		24 cm	
	V = Versuch R = Rechnung		R	V	R	V	R	V	R	V	R	V
1	$P = 18,6 \text{ t}$		0,83	0,56	0,66	0,50	0,24	0,19	0,06	0,13	—	0,06
2	$P = 30,4 \text{ t}$		1,35	0,92	1,08	0,80	0,40	0,39	0,09	0,25	—	0,11
3	$P = 42,8 \text{ t}$		1,91	1,33	1,52	1,16	0,56	0,46	0,13	0,34	—	0,15

Wie Tafel 3 zeigt, fallen die gemessenen Werte bedeutend kleiner aus als die berechneten. Es ist möglich, daß dieser Unterschied sich daraus ergibt, daß bei der außerordentlich örtlichen Lasteinleitung, wie sie beim Versuch angewendet wurde, Fließvorgänge unvermeidlich sind. Dafür spricht die Tatsache, daß mit zunehmender Last der Unterschied geringer wird. In Bild 14 sind die Spannungswerte der Tafel 3 so aufgetragen, daß man die Spannungsverteilung über x erkennt. Es konnten hier nur die ersten drei Meßstellen berücksichtigt werden, da nur sie gleiches y haben. Wie sich zeigt, kommt die Spannungsverteilung des Bildes 5 gut zum Ausdruck.

Damit wäre aus den Versuchen herausgestellt, was für die hier erörterten Fragen wichtig ist. Der Vollständigkeit halber sollen noch weitere Einzelheiten erwähnt und weitere Bilder gezeigt werden. Der Träger hatte vor Versuchsbeginn einen Kalkanstrich

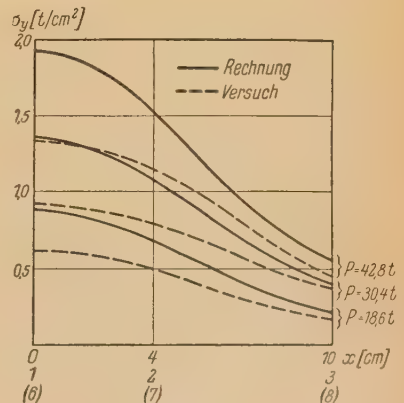


Bild 14.

erhalten, so daß später der Ort der größten Anstrengung und der Fließbeginn durch Kalkabblättern festgestellt werden konnte. Bei einer Last von 65 t begann der Kalkanstrich an der Vorderseite und am Unterrande des Oberflansches in ungefähr halbkreisförmigen Kurven abzublattern (siehe Bild 15, 16 und 18). Die

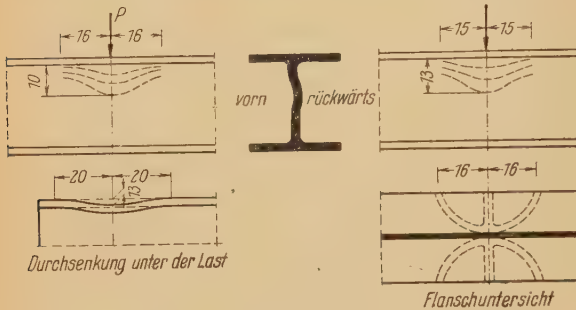


Bild 15.

gemessene Spannung betrug bei dieser Last 3600 kg/cm^2 , was sehr gut der Fließgrenze des St. 52 entspricht. Bei einer Last von 88 t blätterte auch die Rückseite in ähnlichen Kurven ab (siehe Bild 15, 17 und 19). Bei 100 t verstärkte sich das Abblättern an der Vorder- und Rückseite und mit 18 t war das Fließen im Steg so stark, daß die Tragfähigkeit des Profils als erschöpft angesehen werden konnte. Der Steg war bei dieser Last nicht eigentlich ausgebeult, sondern durch das starke Fließen nach Bild 15 seitlich herausgepreßt.

Nach durchgeführtem Versuch wurden die folgenden Aufnahmen gemacht:

- Bild 16: Steg-Vorderseite
- Bild 17: Steg-Rückseite
- Bild 18: Oberflansch Untersicht vorne
- Bild 19: Oberflansch Untersicht rückwärts.

Neben dem Versuch I wurden weitere Versuche gemacht, die zum Teil Fragen anschnitten, die hier rechnerisch behandelt worden sind.

Versuch II

Nach Bild 20 wurde auf einen IP 32 von 350 cm Länge eine Kranschiene KS 75 gelegt und dann mittels einer Presse über eine Stellung eine Druckkraft auf diese Kranschiene ausgeübt. Der Unterflansch des Versuchsträgers lag satt auf dem Prüftisch auf. Eine Stelze wurde verwandt, um dem Oberflansch die Möglichkeit zu geben, seitlich auszuweichen. Bei 120 t Last zeigten sich die ersten Kalkabblätternungen in der Kehle zwischen Steg und Oberflansch an der Rückseite. Bei 16 t begann der Kalkanstrich am unteren Stegrande der Vorderseite abzublattern. Dabei traten wieder die ungefähr halbkreisförmigen Kurven nach Bild 14 auf und angesetzte Spannungsmesser besätigten die Spannungsverteilung nach diesem Bild. Bei 180 t Last dehnten sich die Abblätternungen bis zu den Trägerenden aus, der Oberflansch neigte sich merklich nach vorne über und bei 195 t nahm der Träger keine weitere Last auf. Nach Versuchsende wurden folgende Aufnahmen gemacht:

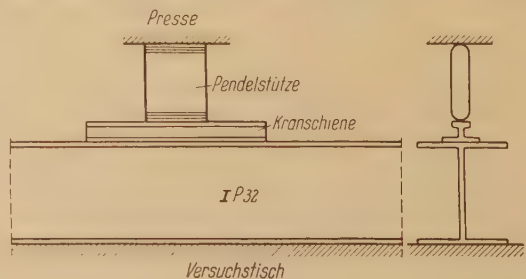


Bild 24.

- Bild 21: Steg-Vorderseite
- Bild 22: Steg-Rückseite
- Bild 23: Ansicht vom Trägerende (links ist die Vorderseite).

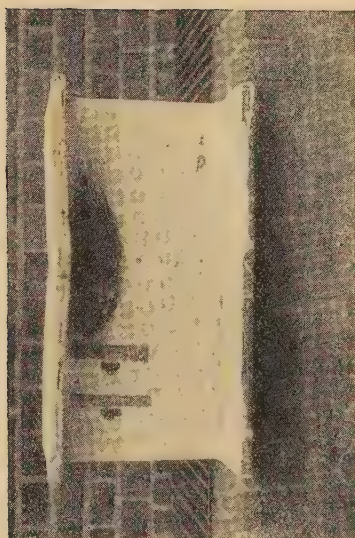


Bild 16.



Bild 17.



Bild 18.



Bild 19.



Bild 21.

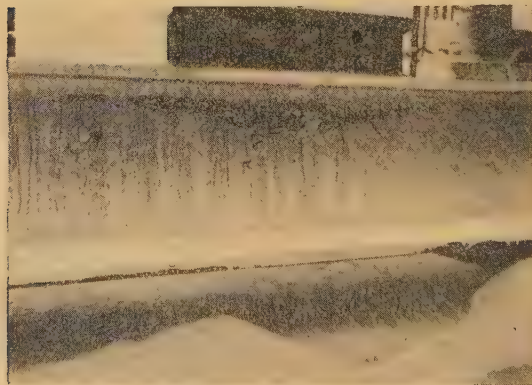


Bild 22.

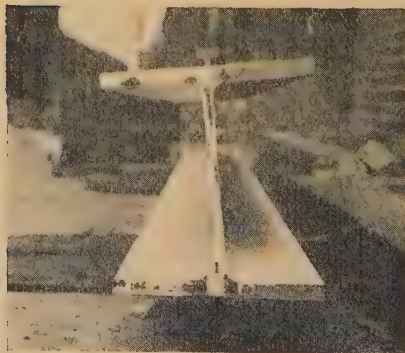


Bild 23.

Versuch III

Die Versuchsanordnung war wie beim Versuch II, nur wurde der Träger nach Bild 24 nicht satt auf den Prüftisch aufgelegt, sondern wurde durch passend geschnittene Stahlfuttermstücke gezwungen, sich zunächst durchzubiegen, ehe er auf dem Unterflansche auflag. Die so erzwungene Biegelinie sollte am Obergurte eine Biegespannung von $1,6 \text{ t/cm}^2$ Zug hervorrufen.

Bei einer Last von 40 t lag der Träger auf allen Futterstücken auf. Die Flanschränder zeigten dabei allerdings nur Biegespannungen von 0,40 und $0,76 \text{ t/cm}^2$, was wohl z. T.

zeigten dabei allerdings nur Biegespannungen von 0,40 und $0,76 \text{ t/cm}^2$, was wohl z. T. darauf zurückgeführt werden kann, daß die Reibungskräfte zwischen Oberflansch und Schiene die Schiene mitwirken lassen.

Bei 85 t traten geringfügige Kalkabblätterungen auf der Oberseite des Oberflansches auf. Bei 120 t blätterte die Stegvorderseite, bei 150 t die Stegrückseite stark ab. Wieder zeigten sich die in Bild 15 angedeuteten Kurven. Bei 218 t war die Tragfähigkeit des Trägers erschöpft und zwar dadurch, daß der Steg ausbeulte. Wir finden damit die Angaben des Bildes 8 bestätigt, denn das gleichzeitige Auftreten von Biegung und örtlicher Lasteinleitung haben die Stabilität des Steges derart herabgesetzt, daß hier im Gegensatz zum Versuch II, wo nur die örtliche Lasteinleitung wirkte, der Steg ausbeulte. Da dieses Ausbeulen bei der kleinen Schlankheit des Steges ein Fließbeulen war, lassen sich die rechnerischen Ansätze kaum zur Nachprüfung heranziehen. Zudem besteht auch über die Mitwirkung der Schiene Unklarheit. Daß sie vorhanden war, erkennt man an der erhöhten Bruchlast des Versuches III gegenüber der des Versuches II.

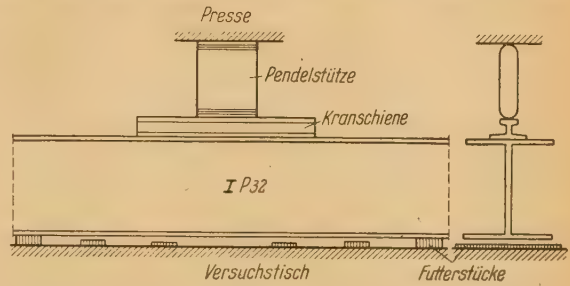


Bild 24.



Bild 25.

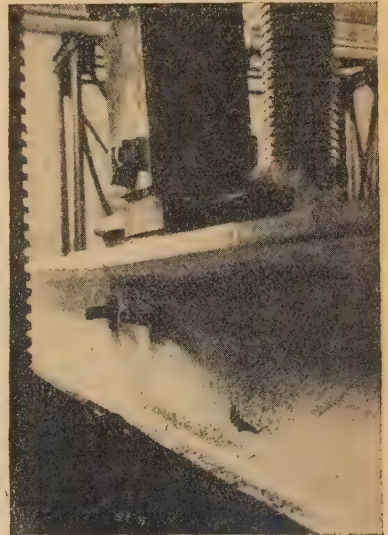


Bild 26.

Nach durchgeführtem Versuch wurden folgende Aufnahmen gemacht:

Bild 25: Stegvorderseite

Bild 26: Stegrückseite.

Die Typenwertmethode, ein neues Verfahren zur Berechnung von bewehrten und unbewehrten Baukörpern

Von Obergeringenieur Heinrich Sasse, V.S.J.

Leiter des technischen Bildungsinstitutes Siegerland in Neunkirchen, Krs. Siegen

Liegen zwei ähnliche aber verschieden große Flächen vor, von denen das Trägheitsmoment nur für die kleinere bekannt ist, so liegt es auf der Hand, daß daraus das Trägheitsmoment der größeren ermittelt werden kann, indem man es mit der vierten Potenz des linearen Größenverhältnisses der beiden Flächen multipliziert.

Würde nun die Hauptbemessung der Bezugsfläche gleich der Einheit des Maßsystems (cm, dm oder m) sein, so wäre es sinnvoll, das Trägheitsmoment dieser Fläche als „Typenwert“ für die Trägheitsmomente aller anderen gleichgestalteten Flächen anzusehen; denn man brauchte ja diesen Wert nur mit der vierten Potenz der Hauptdimension der Vergleichsfläche zu multiplizieren, um auch deren Trägheitsmomente zu erhalten. Und sinnvoll wäre es dann auch, die Bezugsfläche als „Typenfläche“, und eine sich darauf aufbauende Berechnungsweise als „Typenwertmethode“ anzusprechen.

Diese Methode wäre besonders für die Verwendung im Stahlbetonbau geeignet, da man es hier durchweg mit Flächen zu tun hat, die — anders wie im Holz-, Stahl- und Maschinenbau — wegen der Bewehrung komplizierterer Art sind, und deren Berechnung dadurch nicht unwesentlich erschwert ist, daß die Nulllinie des Spannungsdiagramms nicht mit der Schwerachse des Querschnittes identisch, ja sogar in ihrer Lage zur Außenkante der Betondruckfläche sehr veränderlich ist.

In den nachfolgenden Ausführungen soll nun die Typenwertmethode zunächst für rechteckige Stahlbetonquerschnitte entwickelt werden. Es wird sich herausstellen, daß sich nicht nur eine Rechenmethode ergibt, die die bisher gebrauchten allzu vielen Zahlentafeln entbehrlich macht, sondern die auch schnelles und vor allem „zügiges Rechnen“ ermöglicht und durch beides dem Rechner viel Nervenkraft und Zeitaufwand erspart.

Es wird sich aber auch herausstellen, daß durch die Typenwertmethode Berechnungen möglich geworden sind, die bisher entweder überhaupt nicht oder nur auf sehr umständliche Weise durchführbar waren, so z. B. die Berechnung von Platten und Balken (Druck-Biegekörpern) ohne vorherige Schätzung ihres Gewichtes und weiter die Untersuchung der Steifigkeitsverhältnisse von Mehrfeldplatten und -balken, und damit Gewinnung der Grundlage zur genaueren Ermittlung der auftretenden Beton- und Stahlspannungen.

Auch ist es als ein großer Gewinn anzusehen, daß die Typenwertmethode nicht nur auf rechteckige, sondern auch auf vieleckige, kreisförmige, hohle oder sonstwie profilierte Querschnitte angewandt werden kann ohne Rücksicht darauf, ob bei diesen nur zugseitige oder auch druckseitige Bewehrung vorliegt, ob die Stahlquerschnitte in einer oder mehreren Reihen oder ganz unregelmäßig angeordnet sind usw. Auch bietet die Frage keine nennenswerten Schwierigkeiten, ob der Querschnitt nur auf Biegung oder außerdem auch auf Druck beansprucht wird, ob die Achsialkraft mittig, schwach- oder starkaußermittig angreift, oder ob die Biegemomente durch horizontale oder schräg einwirkende Kräfte hervorgerufen werden, ob die Wirkebene des resultierenden Momentes in gleicher Richtung oder in irgend einem Winkel zur Hauptachse des Querschnittes liegt usw.

Wie außerordentlich nützlich die Typenwertmethode ist, zeigt sich an dem einfachen Tatbestand, daß schon die bisherigen mehrseitigen Zahlentafeln zur Berechnung der nur zugseitig bewehrten Platten- und Balkenquerschnitte durch eine einfache „Typenwertkurve“, sog. „Eignungsschaubild“ ersetzt werden können.

Für die Typenwertmethode kann somit der Charakter der Universalität in Anspruch genommen werden, und sie ist darum überall verwendbar, wo bewehrte Betonquerschnitte zu berechnen sind, so bei Deckenplatten, Balken, Pfeilern, Säulen, Streben, Masten, Bögen usw. Sie ist aber auch bei unbewehrten Baukörpern verwendbar, so bei Wänden, Pfeilervorlagen, Schornsteinen, Gewölben usw. und schließlich auch bei Fundamenten, also solchen Baukörpern, bei denen die Frage der Standsicherheit von größerer Bedeutung ist als die des Einhaltens zulässiger Spannungswerte.

Typenwerte und Eignungsschaubilder

Mit Hilfe der Typenwerte ist es möglich, die Nachrechnung und Vorausberechnung von bewehrten und unbewehrten Baukörpern an Hand folgender einfachen und leicht merkbaren Formeln durchzuführen.

$$N = C_N \cdot b \cdot d \cdot \sigma_b \quad (1)$$

$$M_m = C_M \cdot b \cdot d^2 \sigma_b \quad (2)$$

$$F_{e \text{ ges}} = C_E \cdot b \cdot d \quad (3)$$

Hierin bedeuten:

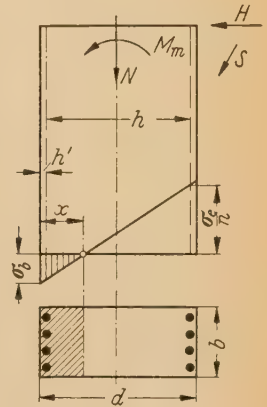
N die gesamte achsiale Belastung des Baukörpers in t;

M_m das den Körper bzw. den zu untersuchenden Querschnitt beanspruchende Lastmoment in tm, bezogen auf die Mittel- bzw. Schwerachse des Querschnittes, hervorgerufen durch besondere Horizontalkräfte H oder durch außermittigen Angriff der Achsialkraft N oder durch schräg einwirkende Kräfte S ;

b die äußere Bemessung des Querschnittes senkrecht zur Wirkebene von M_m in Metern;

d seine äußere Bemessung in Richtung der Momentebene in Metern;

σ_b die zulässige Betondruckspannung in t/m^2 ($= 10 \text{ kg/cm}^2$).



Die Größen C_N und C_M nenne ich „Typenwerte“, weil sie — als unbenannte Größen — bedingt sind durch die Art bzw. Type des Querschnittes, d. h. durch die Frage, ob dieser rechteckig, rund oder irgendwie profiliert gestaltet ist, ob er einseitig oder zweiseitig bewehrt ist usw. Diese Typenwerte sind Kurvenblättern zu entnehmen, die ich „Eignungsschaubilder“ nenne, weil sie die baustatische Eignung der Querschnittstypen veranschaulichen.

Grundlegende Formeln zur Ermittlung der Typenwerte:

Zum Zweck der Einführung in das Wesen und den Gebrauch der Typenwerte und damit auch in den Sinn der Eignungsschaubilder kann es dem Leser nicht erspart werden, folgender mathematischen Entwicklung seine Aufmerksamkeit zu schenken.

Allgemein gelten für sämtliche achsial und auf Biegung beanspruchten Querschnitte Formeln, die man wegen ihrer Allgemeingültigkeit „Universalformeln“ nennen könnte. Sie lauten:

$$\frac{N \cdot x}{\sigma_b} = S_b - n \cdot S_e \quad (4)$$

$$\frac{M_0 \cdot x}{\sigma_b} = J_b + n \cdot J_e \quad (5)$$

Die Formeln gründen sich auf die bekannten Gleichgewichtsbedingungen, sowie das einfache Hooke'sche Spannungdehnungsgesetz. Die einzelnen Größen darin bedeuten:

M_0 die arithmetische Summe der auf den Körper einzirkenden Kraftmomente, jedoch jetzt bezogen auf die Nullachse des Spannungsdiagramms in tm;

x den bekannten Abstand dieser Nullachse von der Druckkante des Betonquerschnittes in m;

S_b bzw. S_e das statische Moment der Betondruckfläche bzw. des Systems der Eisenquerschnitte in m^3 ebenfalls bezogen auf die Nullachse;

I_b bzw. I_e das Trägheitsmoment der Betondruckfläche bzw. des Eisenquerschnittsystems in m^4 , bezogen wie vorstehend;

$n = E_e/E_b$ das bekannte Verhältnis der Elastizitätsmodule, normalerweise $= 15$ gesetzt.

Das Moment M_0 kann unschwer in M_m umgerechnet werden mit Hilfe der Formel

$$M_m = M_0 + N \left(\frac{d}{2} - x \right) \quad (6)$$

So einfach diese Formeln in ihrer äußeren Gestalt sind, so umständlich sind sie in ihrer Anwendung, denn für die Flächenmomente müßten folgende Sonderformeln eingesetzt werden:

$$S_b = \frac{b \cdot x^2}{2} \quad (7a)$$

für das statische Moment der Betondruckfläche, wenn die Spannungsnulllinie innerhalb des Querschnittes liegt, und der Lastangriff stark außermittig ist; jedoch

$$S_b = \frac{b}{2} [x^2 - (x-d)^2] \quad (7b)$$

wenn die Nulllinie außerhalb des Querschnittes liegt (vgl. nebenstehende Figur). Ferner

$$J_b = \frac{b \cdot x^3}{3} \quad (8a)$$

für das Trägheitsmoment der Betonfläche bei Innenlage, bzw.

$$J_b = \frac{b}{3} [x^3 - (x-d)^3] \quad (8b)$$

bei Außenlage der Nullachse; und endlich

$$S_e = F_e (h - x) + F_e' (h' - x) \quad (9a)$$

bzw.

$$J_e = F_e (h - x)^2 + F_e' (h' - x)^2 \quad (9b)$$

für das statische und Trägheitsmoment des Systems der Eisenquerschnitte.

Lästig beim Gebrauch dieser Formeln ist vor allem die Notwendigkeit, zu entscheiden, ob die Spannungsnulllinie innerhalb oder außerhalb des Querschnittes liegt.

Bei Vorausberechnungen wäre diese Entscheidung nur an Hand mehrerer Versuchsrechnungen möglich, da ja die Bemessungen des Querschnittes noch unbekannt sind und erst durch die Rechnung ermittelt werden sollen, die wiederum die Kenntnis der Bemessungen voraussetzt.

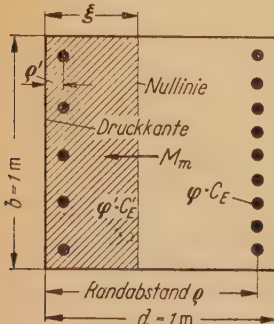
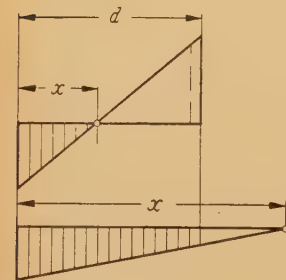
Entwicklung der Typenwert-Formeln

Um nun auf der Grundlage der Universalformeln nicht nur zu einer brauchbaren, sondern auch zu einer angenehmen und leistungsfördernden Berechnungsweise zu gelangen,

werden zweckmäßig für die Größen x , als den Abstand der Spannungsnulllinie von der Druckkante, h als den Abstand der Druckeisen von dieser Kante, F_e als die Querschnittssumme auf der Zugseite und F_e' als die Eisenquerschnittssumme auf der Druckseite folgende Substitutionen vorgenommen:

$$x = \xi \cdot d \quad (10)$$

worin ξ derjenige Abstand der Nullachse sein soll, der vorhanden wäre, wenn der zu untersuchende Querschnitt die Außenmaße $b \cdot d = 1.1 \text{ m}^2$ hätte, und die Eisen wie beim eigentlichen Querschnitt angeordnet wären. (Man kann diesen Querschnitt als den „Typenquerschnitt“ aller Rechteckflächen ansehen.)



$$h = \varrho \cdot d \quad \text{bzw.} \quad h' = \varrho' \cdot d \quad (11)$$

wenn ϱ der Randabstand der Zugeisen und ϱ' der Randabstand der Druckeisen in diesem Typenquerschnitt wäre.

$$\left. \begin{aligned} F_e &= \varphi \cdot F_{e \text{ ges}} = \varphi \cdot C_E \cdot (b \cdot d) \\ F_e' &= \varphi' \cdot F_{e \text{ ges}} = \varphi' \cdot C_E \cdot (b \cdot d) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

worin φ bzw. $\varphi' = F_e/F_{e \text{ ges}}$ bzw. $= F_e'/F_{e \text{ ges}}$ die Verteilungszahlen der Bewehrungsquerschnitte und $C_E = F_{e \text{ ges}}/F_{b \text{ ges}}$ das Verhältnis der Eisenquerschnittssumme zum Gesamtquerschnitt bedeuten.

Durch die Einsetzung dieser Substitutionsformeln in die Formeln (7) bis (9) werden für rechteckige Querschnitte „Typenformeln“ gewonnen von folgender Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} S_b &= \frac{\xi^2}{2} (b \cdot d)^2 = K_S (b \cdot d)^2 \\ J_b &= \frac{\xi^3}{3} (b \cdot d)^3 = K_J (b \cdot d)^3 \\ S_e &= \Sigma \varphi (\varrho - \xi) \cdot F_{e \text{ ges}} = C_S (C_E b \cdot d) \\ J_e &= \Sigma \varphi (\varrho - \xi)^2 \cdot F_{e \text{ ges}} = C_J (C_E b \cdot d) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} K_S &= \frac{\xi^2}{2} \quad \text{bzw.} \quad K_J = \frac{\xi^3}{3} \\ C_S &= \Sigma \varphi (\varrho - \xi) \quad \text{bzw.} \quad C_J = \Sigma \varphi (\varrho - \xi)^2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

die Typenwerte der Flächenmomente bedeuten, d.h. die Flächenmomente des obigen Typenquerschnittes mit den Außenmaßen $b \cdot d = 1 \cdot 1 \text{ m}^2$.

Die Einsetzung dieser Typenformeln in die Universalformeln (4) bis (6) ergibt neue Formeln, welche die Achsialkraft bzw. das Bieugungsmoment des Querschnittes $b \cdot d = 1 \cdot 1$ bedeuten würden, die dieser Querschnitt ertragen könnte, wenn in ihm auf der Betondruckseite die maximale Betondruckspannung $\sigma_b = 1 \text{ t/m}^2$ auftreten würde. Sie lauten

$$C_N = \frac{K_S - n C_E C_S}{\xi} \quad (15 \text{ a})$$

$$C_M = \frac{K_J + n \cdot C_E \cdot C_J}{\xi} - C_N (0,5 - \varphi) \quad (15 \text{ b})$$

Da nun bei Balkenquerschnitten N bzw. $C_N = 0$ sind, so ergeben sich hierfür die vereinfachten Formeln

$$0 = \frac{K_S - n C_E \cdot C_S}{\xi} \quad (16 \text{ a})$$

$$C_M = \frac{K_J + n \cdot C_E \cdot C_J}{\xi} \quad (16 \text{ b})$$

die auch geschrieben werden können

$$C_E = \frac{K_S}{n \cdot C_S} \quad (17 \text{ a})$$

$$C_M = \frac{K_J + K_S \cdot C_J / C_S}{\xi} \quad (17 \text{ b})$$

Erörterung der Typenformeln

Durch die Formeln (1) und (2) wird zum Ausdruck gebracht, daß für die achsiale *T r a g f ä h i g k e i t* eines bewehrten Betonkörpers im wesentlichen die äußeren Bemessungen *b* und *d* sowie die zulässige Betondruckspannung σ_b maßgebend sind. Ähnliches gilt auch für *M_m*, also für die „Widerstandsfähigkeit“ *) des Betonkörpers bzw. des zu untersuchenden Querschnittes gegen Biegemomente. Auch kommt hier zum Ausdruck, daß für diese „Widerstandsfähigkeit“ die Bemessung *d* (d. h. das Außenmaß des Querschnittes in Richtung der Biegebeanspruchung) in der zweiten Potenz, also in wesentlich stärkerem Grade als für die „Tragfähigkeit“ zur Geltung kommt. Das ist ja auch ein Tatbestand, der von den Holz- und Stahlquerschnitten her jedem Statiker bekannt ist, nur daß bei diesen Querschnittsarten das Außenmaß *d* gewöhnlich mit *h* bezeichnet wird.

Die Typenwerte *C_N* und *C_M* müssen nun alle anderen Faktoren erfassen, die für die Trag- und Widerstandsfähigkeit des Querschnittes von Einfluß sind. Welches und welcher Art nun diese Faktoren sind, das ist den Formeln (15) für die Druckbiege-Querschnitte und den Formeln (17) für die reinen Biege-Querschnitte zu entnehmen. Jene sollen in folgendem als *P f e i l e r*- und diese als *B a l k e n*querschnitte angesprochen werden.

Aus (15) folgt zunächst, daß der Typenwert *C_N* eines Pfeilerquerschnittes bedingt ist durch die Größen *K_S*, *n*, *C_E*, *C_S* und ξ , d. h. durch den Typenwert des statischen Momentes der Druckfläche (immer bezogen auf die Nullachse), durch das Modulverhältnis, durch die Verhältniszahl der Bewehrung, durch den Typenwert des statischen Momentes der Bewehrung und den spez. oder relativen Nullachsenabstand.

Die Formeln (14) lassen erkennen, daß *K_S*, *C_S* sowie auch *K_J* und *C_J* wiederum bedingt sind durch die Lage der Nullachse, also durch den spez. Nullabstand ξ , in besonderem Maße aber auch durch die Randabstände ϱ und die Verteilungszahl φ der Bewehrung.

Nimmt man nun für die relativen Randabstände ϱ und ϱ' bestimmte Zahlenwerte an, etwa 0,9 bzw. 0,1 und außerdem für *n* die übliche Zahl 15, so bleiben als Bestimmungsstücke für *C_N* und naturgemäß auch für *C_M* übrig:

1. das Bewehrungsverhältnis *C_E*
2. die Verteilungszahlen φ und φ'
3. der Nulllinienabstand ξ im Spannungsdiagramm.

Konstruktion und Erörterung der Eignungsschaubilder

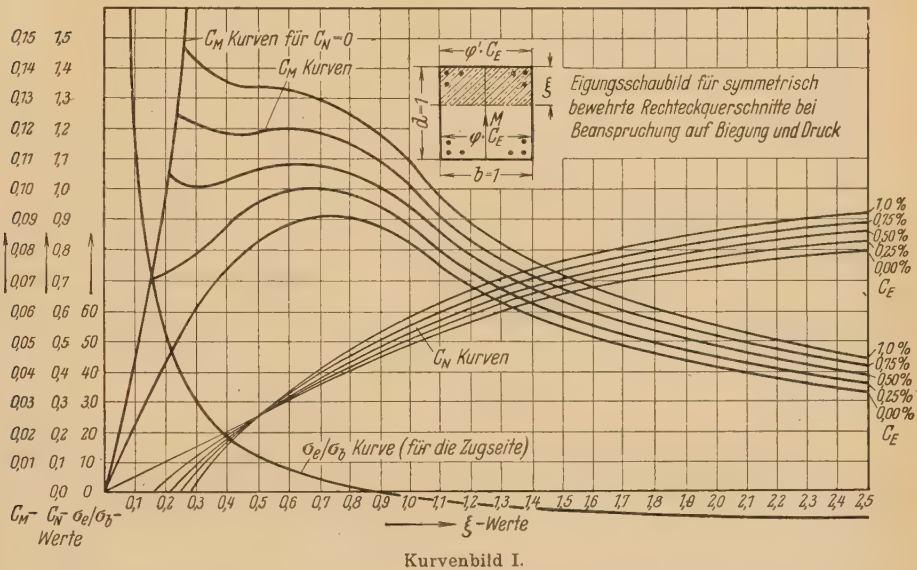
Setzt man ferner in Formel (14) und (15a) nacheinander für *C_E* die Zahlenwerte 0/0,25, 0,5/0,75 und 1% und für ξ die Zahlenwerte 0,1/0,2/0,3 usw. bis etwa 2,5 ein und trägt die durch die Formeln (15a) erhaltenen *C_N*-Werte als Ordinaten und die ξ -Werte als Abscissen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf, dann entsteht die schwach gekrümmte Kurvenschaar des *K u r v e n b i l d e s* I. Diese lassen erkennen daß der Einfluß von *C_E* auf den *C_N*-Wert und damit auch auf die Tragfähigkeit des Querschnittes gering ist.

Die Formel (15b) läßt erkennen, daß für die Größe des Typenwertes *C_M* die spez. Trägheitsmomente *K_S* und *C_S* und in gewissem Grade auch *C_E* maßgebend sind. Da aber nach Formel (14) für die Größe von *K_S* und *C_p* wiederum die Verteilungszahl φ , die Randabstände ϱ und naturgemäß auch der Nullabstand ξ bestimmend sind, so kann auch für *C_M* gesagt werden, daß hierfür ebenfalls ϱ und ξ maßgebende Faktoren sind. Sie sind es sogar in starkem Grade, da in Formel (14b) die Differenz ($\varrho - \xi$) im Quadrat erscheint. Außerdem wirkt sich ξ auch unmittelbar stark aus, ist es doch in *K_S* sogar in der dritten Potenz wirksam.

Auch für die *C_M*-Kurven ist es zweckmäßig, für *C_E* nacheinander die oben angegebenen Zahlenwerte einzusetzen. Die Auftragung der *C_M*-Werte als Ordinaten ergibt im Kurvenbild I die obere Kurvenschaar, die sich in stark gekrümmter Form fahnenartig von links

*) Unter „Tragfähigkeit“ soll in folgendem die Achsial- bzw. Normalkraft *N* verstanden werden, die der Baukörper bei den zulässigen Werten der Materialspannungen σ_b und σ_e zu ertragen vermag. Unter „Widerstandsfähigkeit“ soll das gleichzeitig auftretende Biege- oder Kippmoment *M_m* verstanden werden.

nach rechts erstreckt. Die Kurven beginnen merkwürdigerweise ganz links bei einer vom Koordinatenanfangspunkt ausgehenden steil nach aufwärts sich erstreckenden Linie. Diese Kurve enthält diejenigen C_M -Werte, bei denen C_N gleich 0 ist, was ja bei Balkenquerschnitten grundsätzlich der Fall ist. Sie gibt also die C_M - und ξ -Werte derjenigen Pfeilerquerschnitte an, bei denen die Achsialkraft Null ist.



Die Typenwerte C_M und C_N usw. sind wohl Konstanten vergleichbar, aber sie sind es in Wirklichkeit nicht. Sie sind es nur, solange das Verhältnis der Spannungswerte gleich bleibt. Eher kann man sagen, daß ohne Rücksicht auf die Querschnittsgröße für diese Typenwerte bestimmte konstante Kurven (eben die Kurven der Eignungsschaubilder I bis III) Gültigkeit haben.

Bei den Balkenquerschnitten liegen die Verhältnisse wesentlich einfacher als bei den Pfeilerquerschnitten. Bei ihnen tritt an Stelle von C_N die Größe C_E ; denn die Züge in den Stahleinlagen sind Kräfte, die sich ähnlich auswirken wie die mit N bezeichneten äußeren Kräfte. Sie unterscheiden sich von diesen jedoch dadurch, daß sie beim Anwachsen der Biegemomente ebenfalls zunehmen.

Von maßgebender Bedeutung sind die Verteilungszahlen φ und φ' . Ihr Einfluß ist bei den Pfeilerquerschnitten so stark, daß für die verschiedenen φ -Werte auch verschiedene Kurvenbilder gezeichnet werden mußten. In Blatt I ist nur das Eignungsschaubild für $\varphi = 0,5$, also für die symmetrische Bewehrung der Pfeilerquerschnitte konstruiert worden, da diese Bewehrungstypen für Pfeiler und insbesondere für Säulen fast durchweg in Frage kommt.

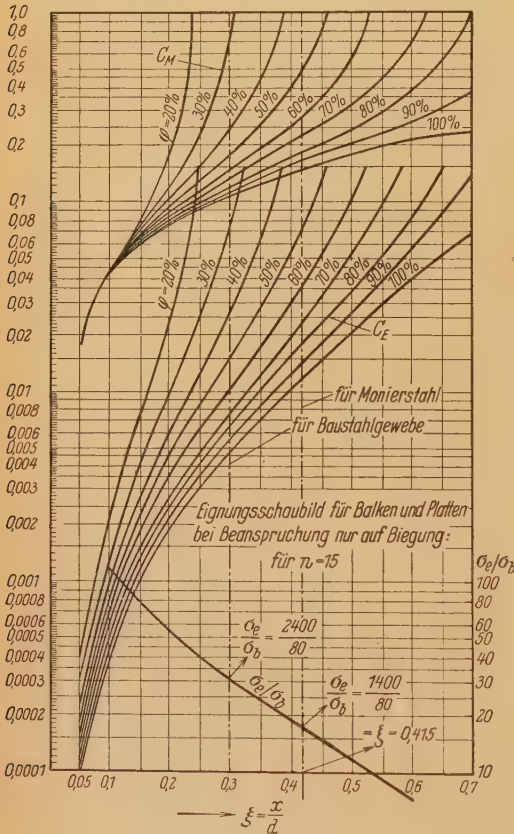
Formel (17a) läßt erkennen, daß C_E und damit der Stahlgehalt des gesamten Querschnittes bei Balkenkörpern umso kleiner ist, je größer n gewählt wird, je mehr also der Elastizitätsmodul des Betons sich dem des Eisens nähert. Auch wirken C_S und damit auch die Verteilungszahl und die Randabstände in verkleinerndem Sinne auf den Stahlgehalt ein. Überdies lassen Kurvenblätter II und III erkennen, daß die Verhältniszahl φ und auch der Randabstand ϱ einen umso stärkeren Einfluß auf den Anstieg der C_E - und C_M -Kurven haben, je kleiner diese Grundwerte sind. Der Einfluß ist sogar so stark, daß auf diesen Blättern die C_E - und C_M -Werte in logarithmischem Maßstab aufgetragen werden mußten.

Aus Formel (17b) folgt, daß bei Balkenquerschnitten auf den C_M -Wert der C_E -Wert merkwürdigerweise ohne direkten Einfluß ist, dafür aber K_J und K_S , letzteres umso mehr, je größer das Verhältnis C_J/C_S ist.

Würde bei symmetrischer Bewehrungsanordnung $\xi = 0,5$ sein, dann wäre C_S gleich 0 und C_J/C_S gleich ∞ . Damit würden auch C_M unendlich groß werden, leider aber auch C_E .

Vergleich der Kurvenbilder I und II

Der Vergleich läßt deutlich erkennen, daß Pfeiler- und Balkenquerschnitte von sehr verschiedener Wesensart sind. Diese Wesensverschiedenheit ist lediglich dem rein äußeren



Kurvenbild II.

Umstände zuzuschreiben, daß die Pfeiler außer auf Biegung auch auf Druck beansprucht werden. Aber durch diese Druckeinwirkung wird, wie die entsprechenden Spannungsdiagramme zeigen, der ξ -Wert in seiner Größe so stark beeinflusst, daß auf Blatt I diese Größe von 0 bis 2,5 aufgetragen werden mußte, während auf Blatt II und III die Auftragung in den Grenzen 0 bis 0,7 schon ausreichend war.

Eigentlich ist vor allem auch, daß bei den niedrig bewehrten Querschnitten die Widerstandsfähigkeit gegen horizontale Kräfte zunächst stark ansteigt, sodann erst stärker und dann immer schwächer abfällt, um erst im Unendlichen den Wert Null zu erreichen. Dieser Tatbestand tritt am deutlichsten bei $C_E = 0$, also bei den unbewehrten Querschnitten in Erscheinung. Bei ihnen liegt das C_M -Maximum genau bei $\xi = 0,75$ und hat den Wert 0,095.

Durch diese Kurvenform kommt ein besonderes Gesetz zum Ausdruck: daß die Auflast N bei den schwach und unbewehrten Querschnitten einen günstigen Einfluß auf C_M ausübt, ja die Widerstandsfähigkeit dieser Körper erst möglich macht. Das stimmt ja auch mit der Lebenserfahrung eines jeden Menschen überein, nach welcher z. B. schwere Körper nicht so leicht umzuwerfen sind, wie leichte.

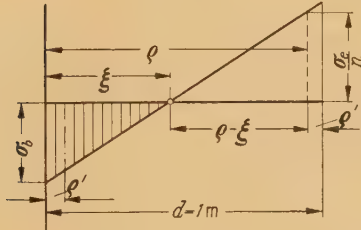
Allgemeine Anwendungen

Die gesamte Betrachtung führt zu der Erkenntnis, daß bei der Gestaltung und Bemessung von Betonkörpern folgende Regeln zugrunde gelegt werden können:

1. Die Randabstände ρ und ρ' können gleich 0,9 bzw. gleich 0,1 angenommen werden.
2. Die Verteilungszahlen φ und φ' sind von Fall zu Fall anzunehmen nach Maßgabe der Biegungsverhältnisse in den einzelnen Abschnitten des Baukörpers, wie sie durch die Momentenlinien dieses Körpers zum Ausdruck kommen.
3. Bei den Pfeilerquerschnitten kommt man mit verhältnismäßig geringer Bewehrung aus, mit etwa 0 bis 1%.

Aus den Eignungsschaubildern ist ferner zu erkennen, daß im ursprünglichsten Sinne des Wortes ξ als Urvariable angesehen werden kann, denn nach diesem Grundwert richten sich alle Typenwerte.

Jedoch erhebt sich nunmehr die Frage: was kann man rein praktisch mit den Kurvenbildern anfangen, und wie soll vor allem die Anwendung der am Anfang gebrachten Gebrauchsformeln möglich sein, wenn die Typenwerte C_N und C_M letzten Endes durch den relativen Nullachsenabstand bestimmt sind, also durch eine Größe, die scheinbar nur von rein theoretischer Wesensart, d. h. weder meßbar noch irgendwie annehmbar ist.



Eine Antwort auf diese wichtige Frage gibt das nebengezeichnete Spannungsdiagramm des Typenquerschnitts. Auf Grund der planimetrischen Ähnlichkeitslehre ist daraus für das Spannungsverhältnis zu entnehmen:

$$\frac{\sigma_{e/n}}{\sigma_b} = \frac{\rho - \xi}{\xi}$$

oder

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{E_e}{E_b} \frac{\rho - \xi}{\xi} \quad (18)$$

Diese Formel bringt zum Ausdruck, daß das Verhältnis der zulässigen Spannungswerte gleich ist der Verhältniszahl der Elastizitätsmodule multipliziert mit dem Verhältnis der größten Abstände von der Spannungsnulllinie.

Setzt man nun in die Formel (18) das Modulverhältnis $n = 15$; $\rho = 0,9$ und nacheinander $\xi = 0,1 / 0,2 / 0,3 / 0,4$ usw. ein, dann entstehen die Ordinatenwerte auf den Kurvenbildern I bis II durch die Kurve σ_e/σ_b dargestellt, die als unterste auf diesen Tafeln zu finden ist. Diese Kurve ermöglicht die Anwendung der gebrachten Formeln und der Eignungsschaubilder auf mannigfaltigste Weise. Das soll zunächst an einigen allgemeinen Zahlenbeispielen gezeigt werden.

Zahlenbeispiel 1:

Gegeben ist ein Pfeilerquerschnitt nach nebenstehender Skizze. Wie groß ist dessen Trag- und Widerstandsfähigkeit bei

$$\sigma_e/\sigma_b = 1400/80 = 17,5.$$

Lösung: Nach Kurvenblatt I ist bei

$$\sigma_e/\sigma_b = 17,5; \quad \xi = 0,41; \quad C_N = 0,0175$$

und $C_M = 0,133$.

Somit bei $\sigma_b = 800 \text{ t/m}^2$ nach Formel (1)

$$N = C_N \cdot b \cdot d \cdot \sigma_b$$

$$= 0,0175 \cdot 0,28 \cdot 0,45 \cdot 800 = \underline{\underline{17,5 \text{ t}}}$$

und nach Formel (2)

$$M_m = C_M \cdot b \cdot d^2 \cdot \sigma_b$$

$$= 0,133 \cdot 0,28 \cdot 0,45^2 \cdot 800 = \underline{\underline{6 \text{ tm}}}.$$

Hiermit wären die maximale Trag- und Widerstandsfähigkeit des gegebenen Querschnittes durch sehr einfache Rechnung gefunden.

Die Bewehrung müßte sein

$$F_{e \text{ ges}} = C_E \cdot b \cdot d = 0,01 \cdot 28 \cdot 45 = 12,7 \text{ cm}^2,$$

wofür

$$\underline{\underline{4 \text{ } \varnothing 20 = 12,5 \text{ cm}^2}}.$$

Die Nutzhöhe wäre bei 1 cm Bügelstärke und 2 cm Überdeckung

$$h = 45 - \frac{2}{2} - 1 - 2 = \underline{41} \text{ cm}$$

entsprechend einem relativen Abstand

$$\varrho_{\max} = \frac{41}{45} = 0,9$$

Stahlspannung auf der Druckseite: Zug- bzw. Druckseite

$$\sigma_e = 15 \cdot 80 \cdot \frac{0,9 - 0,41}{0,41} = + \underline{1430} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}; \quad \sigma'_e = 15 \cdot 80 \cdot \frac{0,1 - 0,41}{0,41} = - \underline{900} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Zahlenbeispiel 2:

Ermittlung eines Pfeilerquerschnittes für $N_0 = 27 \text{ t}$; $M_m = 8,5 \text{ tm}$; $b : d = 0,6 : 1$; $C_E = 1\%$; $\sigma_e/\sigma_b = 1400/80 \text{ kg/cm}^2$.

Lösung:

Wird N_0 zunächst vernachlässigt, so gilt nach Blatt I

$$M_m = C_m \cdot b \cdot d^3 \cdot \sigma_b$$

$$8,5 = 0,145 \cdot (0,6 d) d^3 \cdot 800,$$

woraus

$$d = \sqrt[3]{\frac{8,5}{0,145 \cdot 480}} = \sqrt[3]{0,122} = \underline{\underline{0,495 \text{ m}}}.$$

(Der C_M -Wert liegt auf der Steilkurve ganz links.) Ferner ist

$$b = 0,6 \cdot 0,495 = \sim 0,3 \text{ m}.$$

Gewählt $\underline{\underline{b = 30}}$ und $\underline{\underline{d = 52 \text{ cm}}}$.

Nachrechnung:

Das Gewicht des Pfeilers wäre bei 5 m Höhe

$$G = 0,3 \cdot 0,52 \cdot 5 \cdot 2,4 = \text{rd. } 2 \text{ t}.$$

Somit $N_{\text{ges}} = 27 + 2 = 29 \text{ t}$. Weiter nach Formel (1)

$$C_N = \frac{N}{b d \cdot \sigma_b} = \frac{29}{0,3 \cdot 0,52 \cdot 800} = 0,23,$$

wofür nach Kurvenblatt I

$$C_M = 0,133; \quad \sigma_e/\sigma_b = 12.$$

Somit

$$M_m = C_M \cdot b d^3 \cdot \sigma_b$$

$$= 0,133 \cdot 0,3 \cdot 0,52^3 \cdot 800 = 8,7 \text{ tm},$$

was mit dem verlangten Moment gut übereinstimmt. Weiter ist.

$$F_{e \text{ ges}} = 0,01 \cdot 30 \cdot 52 = 15,7 \text{ cm}^2,$$

wofür 4 $\varnothing$ 24 mit 18 cm^2 oder 12 $\varnothing$ 14 mit $18,4 \text{ cm}^2$

$$\sigma_e = 12 \cdot \sigma_b = 12 \cdot 80 = 960 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Spannfähigkeit des Stahles wird also bei $C_E = 0,01 = 1\%$ nicht voll ausgenutzt. Ein geringerer Prozentsatz würde jedoch wiederum einen größeren Betonquerschnitt erfordern.

Zahlenbeispiel 3:

Für $N_0 = 27 \text{ t}$ und $M_m = 8,5 \text{ tm}$ sollen die Bemessungen eines unbewehrten Pfeilers ermittelt werden. Seitenverhältnis wie in voriger Aufgabe $b:d = 0,6:1$.

Lösung:

Wählt man die äußeren Bemessungen $b \cdot d$ etwa gleich $0,4 \cdot 0,65 \text{ m}$, so würde bei wiederum 5 m Pfeilerhöhe gelten

$$G = 0,4 \cdot 0,65 \cdot 5 \cdot 0,22 = 2,9 \text{ t}$$

$$N_{\text{ges}} = 27 + 2,9 = 29,9 \text{ t}$$

$$C_N = \frac{29,9}{0,4 \cdot 0,65 \cdot 800} = \frac{29,9}{210} = 0,142,$$

wofür nach Kurvenblatt I $\xi = 0,3$ und $C_M = 0,06$. Somit

$$M_m = 0,06 \cdot 0,4 \cdot 0,65^2 \cdot 800 = 8,2 \text{ tm}.$$

Weiter ist $x = 0,3 \cdot 0,65 = 0,195 \text{ m}$ Exzentrizität $e = \frac{d}{2} - \frac{x}{3}$

$$= 32,5 - 19,5/3 = 26 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{Standsicherheit} &= \frac{\text{Standmoment}}{\text{Lastenmoment}} \\ &= \frac{29,9 \cdot 0,325}{8,5} = \underline{\underline{1,15 \text{ fach}}}. \end{aligned}$$

Da dieses viel zu wenig ist, so muß wahrscheinlich bei unbewehrten Querschnitten grundsätzlich anders gerechnet werden, worüber im nächsten Abschnitt das Erforderliche gesagt werden soll.

Zahlenbeispiel 4:

Ermittlung eines Pfeilerquerschnittes für $N_0 = 80 \text{ t}$, $M_m = 8 \text{ tm}$, Seitenverhältnis $b:d = 0,6:1,0$; $\sigma_b = 80 \text{ kg/cm}^2$ und $C_E = 1\%$.

Lösung:

Ohne Rücksichtnahme auf die Achsialkraft N wäre wiederum nach Formel (2)

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_m}{C_M \cdot 0,6 \cdot \sigma_b}}.$$

C_M ist zunächst wiederum auf der linken Steilkurve des Eignungsschaubildes I zu suchen und hat den Wert 0,145. Somit

$$d = \sqrt[3]{\frac{8}{0,145 \cdot 0,6 \cdot 800}} = \sqrt[3]{0,114} = \underline{\underline{0,485 \text{ m}}}.$$

Da nun eine nicht unerhebliche Achsialkraft gegeben ist, so sei dieser Wert von vornherein um 10% größer gewählt, also

$$d = 48,5 + 10\% = \sim 55 \text{ cm}$$

$$b = 0,6 \cdot 55 = \sim 33 \text{ cm}.$$

Weiter wird dann bei 5 m Pfeilerhöhe

Durch Differentiation nach ξ entsteht

$$\frac{d C_M}{d \xi} = -\frac{1}{3} \xi + \frac{1}{4}$$

was für $C_{M \max} = 0$ sein muß. Somit

$$\frac{1}{3} \xi = \frac{1}{4}, \quad \text{woraus} \quad \xi = \frac{3}{4} = 0,75$$

bzw.

$$C_{M \max} = -\frac{0,75^2}{6} + \frac{0,75}{4} = \underline{\underline{0,095}}.$$

Somit beträgt die Standsicherheit bei maximaler Widerstandsfähigkeit des unbewehrten rechteckigen Pfeilerquerschnittes

$$\varnothing = \frac{C_N \cdot 0,5}{C_N \left(0,5 - \frac{\xi}{3}\right)} = \frac{0,5}{0,5 - \frac{0,75}{3}} = 2.$$

Dividiert man ferner Formel (2) durch die Formel (1), so entsteht

$$\frac{M_M}{N} = \frac{C_M b d^2 \sigma_b}{C_N \cdot b d \cdot \sigma_b} = \frac{C_M}{C_N} \cdot d.$$

Dieses wäre für Rechteckquerschnitte das Maß der Außermittigkeit (Exzentrizität e), wenn man die von eventuellen Horizontal- oder Schrägkräften herrührenden Momente ersetzen würde durch eine Vergrößerung der Außermittigkeit der achsialen Druckkraft N . Nach Vorigem kann dann für den Maximalfall der Widerstandsfähigkeit gesetzt werden:

$$\frac{M_m}{N_{\text{ges}}} = \frac{0,095 d}{0,375} = \underline{\underline{0,25 d}}, \quad (19)$$

was ja auch unmittelbar aus dem obigen Spannungsdiagramm hervorgeht.

Die Formel besagt, daß bei einer Standsicherheit $= 2$ der Quotient aus Summe der Biegemomente (bezogen auf die Mittelachse des zu untersuchenden Querschnittes) und Summe der Vertikal- bzw. Achsialkräfte gleich $\frac{1}{4}$ der Hauptdimension d des Querschnittes sein muß. Die Zahl 0,375 ist wie aus Kurvenblatt I hervorgeht, der C_N -Wert für $\xi = 0,75$ und $C_M = 0,095$.

Die durch Formel (19) zum Ausdruck gebrachte Erkenntnis sei erhärtet durch

Zahlenbeispiel 5:

Ermittlung eines Pfeilerquerschnittes für $N_0 = 27 \text{ t}$ und $M_m = 8,5 \text{ t}$ bei wiederum 5 m Pfeilerhöhe.

Lösung:

Sieht man zunächst vom Eigengewicht des Pfeilers ab, so gilt nach Formel (19)

$$d = \frac{4 M_m}{N} = \frac{4 \cdot 8,5}{27} = \underline{\underline{1,25 \text{ m}}}.$$

Die Breite b würde sich nach der Materialspannung richten. Sie sei provisorisch $= 0,6 d = 0,6 \cdot 1,25 = 0,75 \text{ m}$ gesetzt. Dann wäre bei $\gamma = 2,2 \text{ t/m}^3$

$$\begin{aligned} G_e &= (1,25 \cdot 0,75) \cdot 5 \cdot 2,2 = 10,5 \text{ t} \\ N_{\text{ges}} &= 27 + 10,5 = 37,5 \text{ t} \\ \frac{M_m}{N_{\text{ges}}} &= \frac{8,5}{37,5} = 0,225 = \frac{0,225}{1,25} d = 0,18 d, \end{aligned}$$

was der Formel (19) nicht entspricht bzw. was einer Standsicherheit gleichkommen würde, die größer als 2 ist.

Nimmt man nun $d = 1 \text{ m}$ und $b = 0,6 \text{ m}$ an, so wäre

$$G = (0,6 \cdot 1,0) \cdot 5 \cdot 2,2 = 6,6 \text{ t}$$

$$N_{\text{ges}} = 27 + 6,6 = 33,6 \text{ t}$$

und

$$\frac{M_m}{N_{\text{ges}}} = \frac{8,5}{33,6} = 0,253 = \frac{0,253}{1,0} d = \sim \underline{0,25 d},$$

was der Formel (19) genau entspricht.

Die Untersuchung führt somit zu der Erkenntnis, daß, um auf die richtigen Bemessungen zu kommen, bei unbewehrten Körpern, die Dimensionen, welche ohne Rücksicht auf das Eigengewicht berechnet worden sind, vermindert werden müssen. Das erscheint zunächst widerspruchsvoll, wird jedoch verständlich, wenn man bedenkt, daß für die Standsicherheit der unbewehrten und auch der schwach bewehrten Körper die Auflast N_{ges} und damit auch das Eigengewicht des Körpers von grundlegender Bedeutung sind.

Nachprüfung der Spannung:

Aus Formel (1) folgt

$$\sigma_b = \frac{N_{\text{ges}}}{C_N \cdot b \cdot d} = \frac{33,6}{0,375 \cdot 0,6 \cdot 1,0} = \underline{150 \text{ t/m}^2}.$$

Ähnlich folgt aus Formel (2)

$$\sigma_b = \frac{M_m}{C_M \cdot b \cdot d^2} = \frac{8,5}{0,095 \cdot 0,6 \cdot 1^2} = \underline{150 \text{ t/m}^2}.$$

Beide Formeln ergeben also denselben Spannungswert, was als Beweis dafür angesehen werden kann, daß richtig gedacht und gerechnet worden ist.

Erörterung des Ergebnisses:

Im ganzen gesehen ergibt die Untersuchung dieses Abschnittes, daß bei unbewehrten Pfeilern die zulässige Betonspannung vielfach nicht ausgenutzt werden kann, da nicht diese, sondern die Standsicherheit für die Querschnittsbemessung maßgebend ist. Auch eine Verringerung der Breite würde nicht zum Ziel führen, was sich aus folgender Rechnung ergibt.

Angenommen sei $b = 0,3 \text{ m}$ (statt $0,6 \text{ m}$). Somit

$$G = 0,3 \cdot 5 \cdot 2,2 = 3,3 \text{ t}$$

$$N_{\text{ges}} = 27 + 3,3 = 30,3 \text{ t}$$

und weiter

$$\frac{M_m}{N_{\text{ges}}} = \frac{8,5}{30,3} = 0,28 = \frac{0,28 d}{1,0} = 0,28 d.$$

Das bedeutet aber, daß die Standsicherheit nun kleiner als 2 geworden ist.

Ermittlung von Platten- und Balkenquerschnitten ohne vorhergehende Schätzung des Eigengewichtes

Da bei Stahlbetonplatten und -balken, also bei reinen Biegekörpern das Eigengewicht von noch größerem Einfluß auf die Widerstandsfähigkeit des Körpers ist als bei Pfeilern und Säulen (den „Standkörpern“), so bedeutet es offenbar eine große Förderung der rechnerischen Tätigkeit des Baustatikers, wenn ihm eine Rechenmethode an die Hand gegeben wird, die ohne vorhergehende Schätzung des Eigengewichtes oder der Annahme der Hauptdimension des Körpers, für jeden Belastungs- und Bewehrungsfall die Ermitt-

lung knappster Bemessungen des Biegekörpers ermöglicht. Eine solche Methode kann jetzt entwickelt werden.

In der allgemeinen Anwendungsformel (2) kann ohne Schwierigkeit das links stehende Moment M_m in 2 Anteile M_g und M_p zerlegt werden, wovon letztere Größe den Einfluß auf das gesamte Biegemoment darstellt, der von der Verkehrslast plus Gewicht des Deckenputzes und des Fußbodenbelages herrührt, M_g jedoch den Einfluß des reinen Platten- oder Balkengewichtes darstellt. Es gilt dann

$$M_g + M_p = C_M b \cdot d^2 \sigma_b.$$

Bezeichnet nun M_1 den Momenteneinfluß, der von $g = 1/\text{m}^2$ herrührt und γ das spez. Gewicht der Betonmasse, so kann weiter gesetzt werden

$$M_1 \cdot (b \cdot d) \cdot \gamma + M_p = C_M b d^2 \sigma_b.$$

Diese Gleichung nach d aufgelöst ergibt eine Formel, welche die Berechnung der besagten Bauteile ohne vorherige Schätzung ihres Eigengewichtes bis auf 1 cm genau ermöglicht. Sie lautet

$$d = \frac{M_1 \cdot \gamma + \sqrt{4 C_M \cdot M_p \sigma_b / b + (M_1 \cdot \gamma)^2}}{2 C_M \cdot \sigma_b} \quad (20a)$$

Hiermit ist eine etwas lange, aber dennoch leicht merkbare Anwendungsformel gewonnen worden, die in folgendem kurz die „große Wurzelformel“ genannt sein möge.

Bei ihrer Anwendung sind jedoch folgende Punkte zu beachten:

1. daß in p wie bereits oben gesagt das Gewicht des Deckenputzes und des Fußbodenbelages einbegriffen wird;
2. daß bei kreuzweise bewehrten Platten auch γ bzw. M_1 auf die x - und y -Richtung aufgeteilt wird;
3. daß bei Plattenbalken mit Rücksicht darauf, daß das Plattengewicht schon in p enthalten ist, γ mit einem kleineren Wert, etwa 1,7 eingesetzt werden kann.

Die „große Wurzelformel“ würde nun auch bei Durchlaufplatten und Durchlaufbalken für jedes Feld das statisch und wirtschaftlich erforderliche d ergeben. Soll nun aber diese Hauptabmessung vom stärkst beanspruchten Körperabschnitt her oder aus irgendwelchen anderen Gründen durchlaufend das Maß d erhalten, so kann die Summenfläche der Stahleinlagen reduziert werden nach der Gleichung

$$F_{\text{ges}} = C_E b d \frac{d}{d} = C_E b \frac{d^2}{d}.$$

Da nun nach Formel (2) $b \cdot d^2 = M_m / C_M \cdot \sigma_b$ ist, so erhält man durch Einsetzung wiederum eine Gebrauchsformel, die nicht nur für sämtliche Querschnitte des durchlaufenden Biegekörpers von Anwendbarkeit ist, sondern auch eine große Rechnungserleichterung bringt, nämlich

$$F_{\text{ges}} = \frac{C_E}{C_M} \cdot \frac{M_{\text{ges}}}{\sigma_b d} \quad (20b)$$

In diese Formel ist jedoch $M_{\text{ges}} = M_p$ vermehrt um das richtige M_g zu setzen. Der Bruch C_E / C_M kann als konstanter Wert aus folgender Tabelle entnommen werden.

φ/φ'	Moniereisen			Baustahlgewebe		
$\%$	σ_e/σ_b	C_M	C_E/C_M	σ_e/σ_b	C_M	C_E/C_M
100/0	1400/80	0,156	0,075	2400/80	0,11	0,041
90/10	1400/80	0,172	0,083	2400/80	0,115	0,046
80/20	1400/80	0,190	0,099	2400/80	0,12	0,056
70/30	1400/80	0,218	0,104	2400/80	0,13	0,059
60/40	1400/80	0,280	0,125	2400/80	0,15	0,067

Diese Tabelle enthält die interessante Feststellung, daß für Baustahlgewebe für $\sigma_e/\sigma_b = 2400/80 = 30$ der C_M -Wert ungünstiger, das Verhältnis C_E/C_M jedoch wesentlich günstiger liegt als für Moniereisen mit $\sigma_e/\sigma_b = 1400/80 = 17,5$.

Bei Platten ist ferner zu beachten, daß der tatsächliche Randabstand h gleich $q \cdot d = 0,9 \cdot d$ zu gering ausfallen würde, wenn nicht die endgültige Dicke errechnet wird aus

$$\underline{d} = 0,9 d + 1 + \frac{\partial}{2} \text{ (in cm)}, \quad (21a)$$

worin 1 die Betondeckung und ∂ die Stärke der Eiseneinlagen bedeuten. Diesem Umstand ist von vornherein auch dadurch Rechnung zu tragen, daß in die große „Wurzelformel“ $\gamma = 2,5$ statt $2,4 \text{ t/m}^3$ eingesetzt wird.

Bei kreuzweise bewehrten Platten ist bekanntlich ein Unterschied zu machen zwischen d_x und d_y . Unter der Annahme, daß d_x der stärkeren Belastungsrichtung angehört, wäre die endgültige Plattenstärke zu berechnen nach

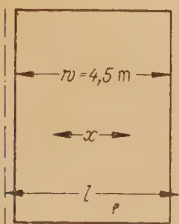
$$\underline{d} = 0,9 d_x + 1 + \frac{\partial}{2} \quad (21b)$$

d_y müßte $d_x - \partial$ eingesetzt werden.

Alle diese Einzelheiten werden an Hand der folgenden Zahlenbeispiele ohne weiteres verständlich.

Zahlenbeispiel 6:

Berechnung einer einseitig gespannten freiaufliegenden Stahlbetonplatte für die in nebenstehender Skizze eingetragene Lichtweite.



Nutzlast und Putz und Belag

$$p = 200 + 60 = 260 \text{ kg/m}^2$$

$$\sigma_e/\sigma_b = 1400/80; \varphi = 100\%.$$

Lösung:

Stützweite

$$l = w + 0,1 = 4,5 + 0,1 = 4,6 \text{ m}$$

$$M_1 = \frac{1 \cdot 4,6^2}{8} = 2,65 \text{ tm.}$$

$$M_p = 2,65 \cdot 0,26 = 0,69 \text{ tm}$$

$$C_M = 0,156; C_E/C_M = 0,075 \text{ nach obiger Tabelle.}$$

Somit

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{M_1 \gamma + \sqrt{4 C_M \cdot M_p \cdot \sigma_b / b + (M_1 \gamma)^2}}{2 C_M \cdot \sigma_b e} \\
 &= \frac{2,65 \cdot 2,5 + \sqrt{4 \cdot 0,156 \cdot 0,69 \cdot 800 / 1,0 + 6,6^2}}{2 \cdot 0,156 \cdot 800} \\
 &= \frac{6,6 + \sqrt{350 + 43,5}}{250} = 0,106 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

Gewählt:

$$\bar{d} = 0,9 \cdot 10,6 + 1 + 0,5 = \text{rd. } \underline{\underline{12 \text{ cm}}}$$

$$G = 0,12 \cdot 2,4 = 0,29 \text{ t/m}^2$$

$$M_{\text{ges}} = 0,69 + 0,29 \cdot 2,65 = 1,47 \text{ tm}$$

$$f_{\text{ges}} = \frac{C_E}{C_M} \cdot \frac{M_{\text{ges}}}{\bar{d} \sigma_b} = 0,075 \cdot \frac{1,47}{0,12 \cdot 800} = 11,4 \text{ cm}^2$$

wofür $11 \text{ } \varnothing 12 = 12,4 \text{ cm}^2$.**Nachprüfung:**

Nach der bisherigen Methode würde gerechnet werden können

$$h = 12 - 1 - 0,6 = \underline{\underline{10,4 \text{ cm}}}$$

$$r = \frac{h}{\sqrt{M_{\text{ges}}}} = \frac{10,4}{\sqrt{1470}} = \frac{10,4}{38,5} = 0,27$$

wofür aus den Zahlentafeln im Wendehorst entnommen

$$\sigma_b / \sigma_e = 73 / 1400; f_e = 1,144 \cdot 10,4 = \underline{\underline{11,8 \text{ cm}^2}}$$

was mit dem obigen bestens übereinstimmt.

Diese Rechnung ist auch einfach, sie setzt jedoch voraus

1. die Benutzung von Zahlentafeln,
2. die vorherige Schätzung des Plattengewichtes bzw. der Plattenstärke.

Zahlenbeispiel 7:

Freiaufhängende Platte, einseitig gespannt für 5,5 m Lichtweite,

$$p = 500 + 80 = 580 \text{ kg/m}^2; \sigma_e / \sigma_b = 1400 / 80; \varphi = 100\%.$$

Lösung:

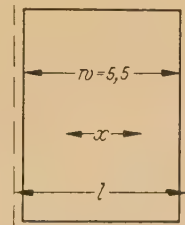
$$l = 5,5 + 0,15 = 5,65 \text{ m}$$

$$M_1 = \frac{1 \cdot 5,65^2}{8} = 4 \text{ tm}$$

$$M_p = 4 \cdot 0,58 = 2,32 \text{ tm}$$

$$C_M \text{ wie im vorigen Beispiel } 0,156;$$

$$C_E / C_M = 0,075.$$



Somit

$$d = \frac{4 \cdot 0,25 + \sqrt{4 \cdot 0,156 \cdot 2,32 \cdot 800 + 10^2}}{2 \cdot 0,156 \cdot 800} = \frac{10 + \sqrt{1170 + 100}}{250} = 18,5 \text{ cm}^2$$

Gewählt

$$d = 0,9 \cdot 18,5 + 1 + 0,9 = \underline{\underline{\text{rd. } 19 \text{ cm.}}}$$

Weiter ist

$$M_{\text{ges}} = 2,32 + 0,19 \cdot 2,4 \cdot 4,0 = 4,14 \text{ tm}$$

$$f_{e \text{ ges}} = \frac{0,075 \cdot 4,14}{0,19 \cdot 800} = \text{rd. } 21 \text{ cm}^2,$$

wofür

$$9 \text{ } \emptyset 18 = 23 \text{ cm}^2.$$

Nachprüfung:

$$h = 19 - 1 - 0,9 = 17,1 \text{ cm}$$

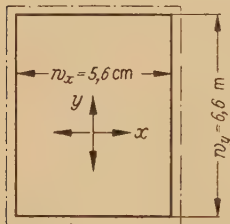
$$r = \frac{17,1}{\sqrt{4140}} = \frac{17,1}{64} = 0,27$$

$$\sigma_b / \sigma_e = 73 / 1400; \quad f_e = 1,144 \cdot 17,1 = 19,6 \text{ cm}^2,$$

was mit dem obigen gut übereinstimmt.

Zahlenbeispiel 8:

Frei aufliegende kreuzweis bewehrte Platte für $w_x = 5,1$ und $w_y = 6,6$ m; $p = 500 + 80 = 580 \text{ kg/m}^2$; $\sigma_e / \sigma_b = 1400 / 80$ und $\varphi = 100\%$.



$$l_x = 5,6 + 0,15 = 5,75 \text{ m}$$

$$l_y = 6,6 + 0,15 = 6,75 \text{ m}$$

$$\frac{l_y}{l_x} = \frac{6,75}{5,75} = 1,16$$

$$1,16^4 = 1,35^2 = 1,84$$

$$\frac{q_x}{q} = \frac{1,84}{1 + 1,84} = \frac{1,84}{2,84} = 0,65$$

$$\gamma_x = 1 \cdot 0,65 = 0,65 \text{ t/m}^2;$$

$$\gamma_y = 1 \cdot 0,35 = 0,35 \text{ t/m}^2;$$

$$p_x = 0,58 \cdot 0,65 = 0,38 \text{ t/m}^2;$$

$$p_y = 0,58 \cdot 0,35 = 0,20 \text{ t/m}^2;$$

$$M_{1x} = \frac{0,65 \cdot 5,75^2}{8} = 2,7 \text{ tm}; \quad M_{1y} = \frac{0,35 \cdot 6,75^2}{8} = 1,98 \text{ tm};$$

$$M_{px} = \frac{0,38 \cdot 5,75^2}{8} = 1,56 \text{ tm}; \quad M_{py} = \frac{0,2 \cdot 6,75^2}{8} = 1,14 \text{ tm}.$$

Somit

$$d_x = \frac{2,7 \cdot 2,5 + \sqrt{4 \cdot 0,156 \cdot 800 + 6,8^2}}{2 \cdot 0,156 \cdot 800} = \frac{6,8 + \sqrt{790 + 46}}{250} = 0,14 \text{ m}.$$

Gewählt

$$d = 0,9 \cdot 14 + 1,0 + 0,8 = 14,4 = \underline{\underline{\text{rd. } 15 \text{ cm.}}}$$

Weiter ist gültig für die x-Richtung:

$$g_x = 0,65 \cdot 0,15 \cdot 2,4 = \dots \text{rd. } 0,24 \text{ t/m}^2$$

$$M_{gx} = \frac{0,24 \cdot 5,75^2}{8} = \dots \quad 0,98 \text{ tm}$$

$$M_{px} = \dots \quad 1,56 \text{ tm}$$

$${}_x M_{\text{ges}} = 2,54 \text{ tm}$$

$${}_x f_e = \frac{0,075 \cdot 2,54}{0,15 \cdot 800} = 16 \text{ cm}^2,$$

wofür

$$\underline{\underline{9 \text{ } \emptyset 16 = 18 \text{ cm}^2.}}$$

Gültig für die y-Richtung:

$$\begin{aligned}
 g_y &= 0,35 \cdot 0,15 \cdot 2,4 = \dots \text{rd. } 0,13 \text{ t/m}^2 \\
 {}_yM_g &= \frac{0,13 \cdot 6,75^2}{8} = \dots \dots \dots 0,74 \text{ tm} \\
 {}_yM_p &= \dots \dots \dots 1,14 \text{ tm} \\
 {}_yM_{\text{ges}} &= 1,88 \text{ tm} \\
 {}_y f_e &= \frac{0,075 \cdot 1,88}{(0,15 - 0,016) \cdot 800} = 13,2 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

wofür 7 Ø 16 = 14,2 cm².

Berechnung von Durchlaufbalken

Vorbemerkung.

Die Formeln, die hier zu benutzen sind, lauten

$$d = \frac{M_1 \cdot \gamma + \sqrt{4 C_M \cdot M_P \sigma_b / b + (M_1 \gamma)^2}}{2 C_M \sigma_b}$$

Hierin ist einzusetzen

$$\gamma = 1,6 \text{ bis } 1,7 \text{ t/m}^3$$

aus einem Grunde, der bereits auf Seite 45 mitgeteilt worden ist.

Feiner

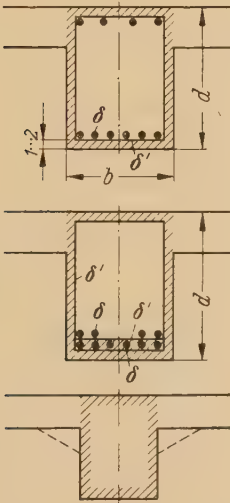
$$F_{e \text{ ges}} = \frac{C_E}{C_M} \cdot \frac{M_{\text{ges}}}{d \sigma_b}$$

Hierin ist zu setzen

$$\underline{d} = 0,9 d + \frac{\delta}{2} + \delta' + (1 \div 2) \text{ cm,}$$

wenn die Bewehrung in einer Reihe und

$$d = 0,9 d + 1,5 \delta + \delta' + (1 \div 2) \text{ cm,}$$



wenn die Bewehrung in 2 Reihen angeordnet wird. δ' ist die Stärke des Bügeleisens und δ die des Trageisens.

Um nun an den Auflagestellen die bisher üblichen Vouten ganz zu vermeiden, ist es zweckmäßig, hier auch Eisen in der Druckzone anzuordnen und die Verteilung mit $\varphi/\varphi' = 70/30\%$ vorzunehmen. Diese Wahl ist auch dann zu empfehlen, wenn in einem positiven Felde negative Momente zu erwarten sind bzw. wenn in einem Endfelde Biegemomente auftreten, die wesentlich stärker sind, als die Momente in den anderen Feldern. Da nun zum Halten der Bügel in allen Feldern aus konstruktiven Gründen mindestens 2 Eisen in der Druckzone angeordnet werden, so empfiehlt es sich, auch für die normal bewehrten Querschnitte mit der Verteilungsziffer $\varphi/\varphi' = 90/10\%$ zu rechnen. Als Balkenbreite empfiehlt es sich, nicht nur über den Stützen, sondern auch in den Feldern das normale b einzusetzen, da dann mit dem vollen σ_b -Wert gerechnet werden kann. Außerdem sind ja die seitlichen Plattenteile bei kreuzweiser Bewehrung schon für die Kraftübertragung in der x- bzw. y-Richtung in Anspruch genommen.

Die Momentenermittlung geschieht am besten graphisch nach dem Festpunktverfahren, weil sich dann die statische Berechnung auf die Querschnittsermittlung, ja sogar nur auf die Ermittlung der Stahlbewehrung beschränken kann, und weil man dann auch den besten Überblick gewinnt über die Belastungsverhältnisse in den einzelnen Balkenabschnitten.

Über alle weiteren Einzelheiten gibt das folgende Zahlenbeispiel Auskunft.

Zahlenbeispiel 9:

Ein Durchlaufbalken über 5 Felder sei nach Blatt IV belastet, Feldweiten und Lastgrößen seien also als sehr ungleich angenommen. Zu ermitteln ist bei einer Balkenbreite von 0,4 m die günstigste Höhe d des Balkens, sowie die günstigsten Bewehrungen für die gefährdeten Querschnitte in den Feldern und über den Stützen. Der Balken soll ohne Vouten ausgeführt werden und überall gleiche Höhe und gleiche Breite haben.

Lösung:

Auf Bild IV sind nach dem Festpunktverfahren folgende Momentenlinien konstruiert:

1. für eine gleichbleibende Durchlaufast von $g = 1 \text{ t/m}$;
2. für die Verkehrslast $p_1 = 3,4 \text{ t/m}$ nur in Feld 1 wirkend;
3. für $p = 1,8 \text{ t/m}$ nur in Feld 2;
4. für $p = 3 \text{ t/m}$ nur in Feld 3;
5. für $p = 1,2 \text{ t/m}$ nur in Feld 4;
6. für $p = 1,5 \text{ t/m}$ nur in Feld 5.

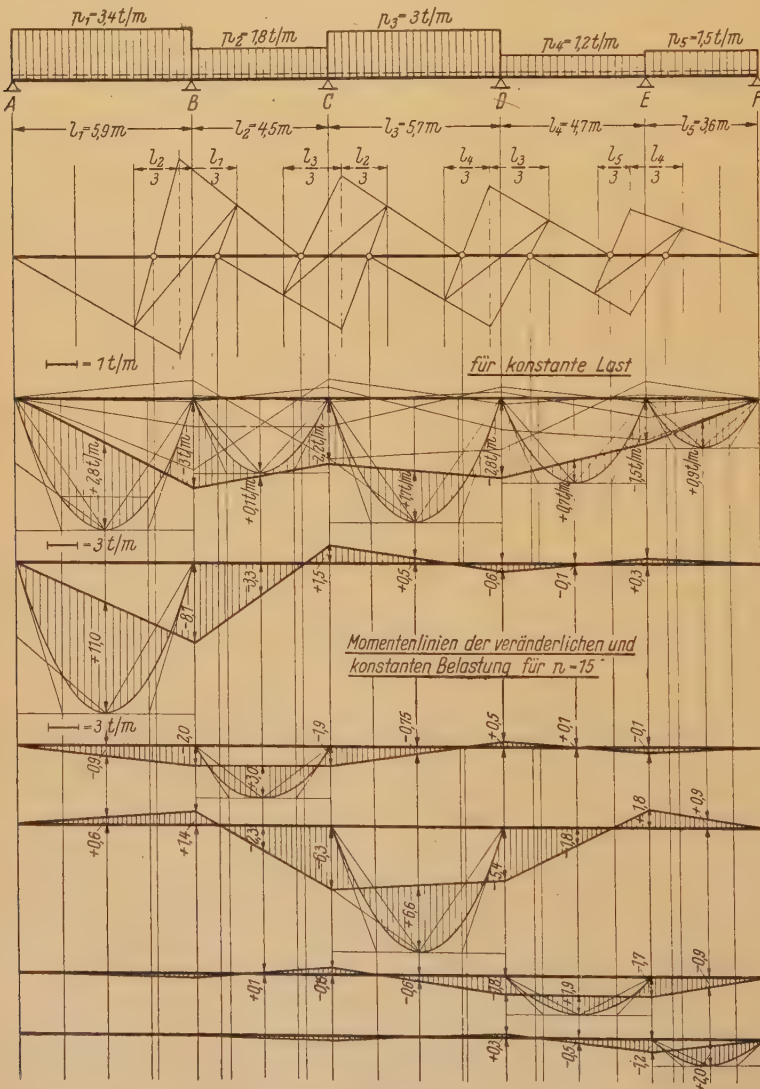


Bild IV.

Um die Ungleichheit der Belastung noch mehr in Erscheinung treten zu lassen, sind die Plattengewichte einschließlich Putz und Belag in die Verkehrslasten einbegriffen worden. Bei praktischen Rechnungen müßten diese Gewichte als konstante Last aufgefaßt werden, die je nach Maßgabe der Lastenverteilung in der x - und y -Richtung in den einzelnen Balkenfeldern verschieden ausfallen würde. Es müßte dann hierfür eine besondere Momentenlinie konstruiert werden. Die Bemessung der Querschnitte gestaltet sich wie folgt.

Feld 1

Um für den Durchlaufbalken eine möglichst geringe Höhe zu erhalten, sei in Feld 1 als dem linken Außenfeld und dem am stärksten belasteten Feld außer in der Zugzone eine Bewehrung auch in der Druckzone angenommen im Verhältnis $\varphi/\varphi' = 70/30\%$. Hierfür ist nach Kurvenblatt II bei $\sigma_e/\sigma_b = 1400/80 = 17,5$; $\xi = 0,415$; $C_M = 0,218$; $C_E = 0,0227$ und $C_E/C_M = 0,104$.

Bieugungsmomente nach Bild IV:

$$M_1 = 2,8 \text{ tm}$$

$$M_p = 11,0 + 0,6 = 11,6 \text{ tm}$$

$\gamma = 1,7$ nach S. 45.

Somit

$$\begin{aligned} d &= \frac{M_1 \cdot \gamma + \sqrt{4 C_M \cdot M_p \sigma_b / b + (M_1 \gamma^2)}}{2 C_M \sigma_b} = \frac{2,8 \cdot 1,7 + \sqrt{4 \cdot 0,218 \cdot 11,6 \cdot 800 / 0,4 + 4,8^2}}{2 \cdot 0,218 \cdot 800} \\ &= \frac{4,8 + \sqrt{20400 + 23}}{350} = \frac{147,8}{350} = 0,43. \end{aligned}$$

Bei 2 cm Überdeckung und Anordnung der unteren Bewehrung in 2 Reihen wäre dann zu wählen

$$\underline{d = 0,9 \cdot 43 + 1,5 \cdot 2 + 1 + 2 = \text{rd. } 45 \text{ cm}}$$

(Die Drahtstärken einstweilen gleich 2 bzw. 1 cm angenommen.)

Weiter gilt: Balkengewicht bei 15 cm Plattenstärke $g = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 2,4 = \text{rd. } 0,3 \text{ t/m}$ und

$$M_g = 2,8 \cdot 0,3 = \dots \dots \dots 0,84 \text{ tm}$$

$$M_p = \dots \dots \dots \underline{11,60 \text{ tm}}$$

$$M_{\text{ges}} = 12,44 \text{ tm}$$

Somit

$$\begin{aligned} F_{e \text{ ges}} &= \frac{0,104 \cdot 12,44}{800 \cdot 0,45} = 0,00365 \text{ m}^2 \\ &= 36,5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Bewehrung oben:

$$F'_e = 0,3 \cdot 36,5 = 11 \text{ cm}^2$$

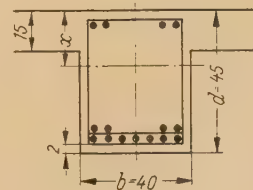
$$4 \varnothing 18 = \dots \dots \dots 10,1 \text{ cm}^2$$

Bewehrung unten:

$$F_e = 0,7 \cdot 36,5 = 26 \text{ cm}^2$$

$$11 \varnothing 18 = \dots \dots \dots 28,0 \text{ cm}^2$$

$$\underline{F_{e \text{ ges}} = 38,1 \text{ cm}^2}$$



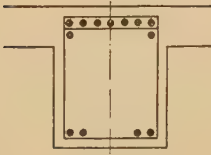
Über Stütze B:

$$M_g = -3 \cdot 0,3 = \dots \dots \dots - 0,9 \text{ tm}$$

$$M_p = -8,1 - 2,0 = \dots \dots \dots - 10,1 \text{ tm}$$

$$\underline{M_{\text{ges}} = -11,0 \text{ tm}}$$

Zur Ersparung der Vouten sei die Verteilungszahl hier ebenfalls $\varphi/\varphi' = 70/30\%$ angenommen.



Somit

$$F_{e \text{ ges}} = \frac{0,104 \cdot 11}{800 \cdot 0,45} = 32 \text{ cm}^2.$$

Bewehrung oben:

$$F_e = 0,7 \cdot 32 = 22,4 \text{ cm}^2$$

$$9 \text{ } \varnothing 18 = \dots \dots \dots 22,8 \text{ cm}^2$$

Bewehrung unten:

$$F_e' = 0,3 \cdot 32 = 9,6 \text{ cm}^2$$

$$4 \text{ } \varnothing 18 = \dots \dots \dots 10,1 \text{ cm}^2$$

$$F_{e \text{ ges}} = 32,9 \text{ cm}^2$$

Im Felde 2

Max. positives Moment

$$M_{\text{ges}}^+ = -0,1 \cdot 0,3 + 3,0 + 0,1 = 3,7 \text{ tm}$$

Max. negatives Moment (im Mittel)

$$M_{\text{ges}}^- = \frac{-3 - 0,1 - 2,2}{3} \cdot 0,3 - 3,3 - 2,3 = -7,37 \text{ tm}.$$

Bei

$$\varphi/\varphi' = 60/40\%; C_M = 0,28; C_E/C_M = 0,125$$

$$F_{e \text{ ges}} = \frac{0,125 \cdot 7,37}{800 \cdot 0,45} = 26 \text{ cm}^2$$

Bewehrung oben:

$$F_e = 0,6 \cdot 26 = 15,5 \text{ cm}^2$$

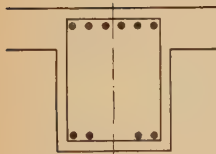
$$6 \text{ } \varnothing 18 = \dots \dots \dots 15,3 \text{ cm}^2$$

Bewehrung unten:

$$F_e' = 0,4 \cdot 26 = 10,5 \text{ cm}^2$$

$$4 \text{ } \varnothing 18 = \dots \dots \dots 10,2 \text{ cm}^2$$

$$F_{e \text{ ges}} = 25,5 \text{ cm}^2$$



Über Stütze C:

$$M_{\text{ges}} = -2,2 \cdot 0,3 - 1,9 - 6,3 = -8,86 \text{ tm}$$

Verteilung

$$\varphi/\varphi' = 80/20\% \text{ mit } C_E/C_M = 0,099$$

Somit

$$F_{e \text{ ges}} = \frac{0,099 \cdot 8,86}{800 \cdot 0,45} = 24,5 \text{ cm}^2$$

Bewehrung oben:

$$F_e = 0,8 \cdot 24,5 = 19,5 \text{ cm}^2$$

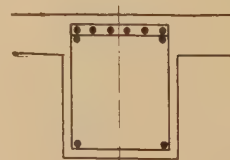
$$8 \text{ } \varnothing 18 = \dots \dots \dots 20,3 \text{ cm}^2$$

Bewehrung unten:

$$F_e' = 0,2 \cdot 24,5 = 4,9 \text{ cm}^2$$

$$2 \text{ } \varnothing 18 = \dots \dots \dots 5,1 \text{ cm}^2$$

$$F_{e \text{ ges}} = 25,4 \text{ cm}^2$$



Oben zweireihig gewählt wegen des besseren Anschlusses an Feld 2.

In Feld 3

$$M_{ges} = 1,7 \cdot 0,3 + 0,5 + 6,6 = 7,61 \text{ tm}$$

Verteilung

$$\varphi/\varphi' = 90/10\text{‰}_0 \text{ mit } C_E/C_M = 0,083$$

Somit

$$F_{e ges} = \frac{0,083 \cdot 7,61}{800 \cdot 0,45} = 17,4 \text{ cm}^2$$

Bewehrung oben:

$$F_e' = 0,1 \cdot 17,4 = 1,74 \text{ cm}^2$$

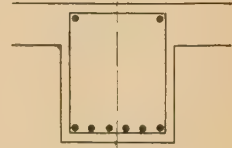
$$2 \text{ } \varnothing 18 = \dots\dots\dots 5,1 \text{ cm}^2$$

Bewehrung unten:

$$F_e = 0,9 \cdot 17,4 = 16$$

$$6 \text{ } \varnothing 18 = \dots\dots\dots 15,2 \text{ cm}^2$$

$$F_{e ges} = \underline{\hspace{1cm}} 20,3 \text{ cm}^2$$



Über Stütze D:

$$M_{ges} = -2,8 \cdot 0,3 - 0,6 - 5,4 - 1,8 = \underline{\hspace{1cm}} -8,64 \text{ tm}$$

Zur Ersparnis der Vouten auch hier

$$\varphi/\varphi' = 70/30\text{‰}_0 \text{ und } C_E/C_M = 0,104$$

Somit

$$F_{e ges} = \frac{0,104 \cdot 8,64}{800 \cdot 0,45} = 25 \text{ cm}^2$$

Bewehrung oben:

$$F_e = 0,7 \cdot 2,5 = 17,5 \text{ cm}^2$$

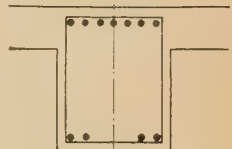
$$7 \text{ } \varnothing 18 = \dots\dots\dots 17,8 \text{ cm}^2$$

Bewehrung unten:

$$F_e' = 0,3 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ cm}^2$$

$$4 \text{ } \varnothing 18 = \dots\dots\dots 10,2 \text{ cm}^2$$

$$F_{e ges} = \underline{\hspace{1cm}} 28,0 \text{ cm}^2$$



In Feld 4:

$$M_{ges}^+ = 0,7 \cdot 0,3 + 0,1 + 1,9 = + 2,21 \text{ tm}$$

$$M_{ges}^- = 0,7 \cdot 0,3 - 0,1 - 1,8 - 0,5 = -2,19 \text{ tm}$$

$$\varphi/\varphi' = 60/40\text{‰}_0 \text{ mit } C_E/C_M = 0,125$$

Somit

$$F_{e ges} = \frac{0,125 \cdot 2,21}{800 \cdot 0,45} = 7,5 \text{ cm}^2$$

Bewehrung oben:

$$F_e' = 0,4 \cdot 7,5 = 3,0 \text{ cm}^2$$

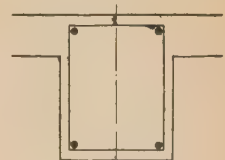
$$2 \text{ } \varnothing 18 = \dots\dots\dots 5,1 \text{ cm}^2$$

Bewehrung unten:

$$F_e = 0,6 \cdot 7,5 = 4,5 \text{ cm}^2$$

$$2 \text{ } \varnothing 18 = \dots\dots\dots 5,1 \text{ cm}^2$$

$$F_{e ges} = \underline{\hspace{1cm}} 10,2 \text{ cm}^2$$



Über Stütze E:

$$M_{\text{ges}}^+ = -1,5 \cdot 0,3 + 0,3 + 1,8 = 1,65 \text{ tm}$$

$$M_{\text{ges}}^- = -1,5 \cdot 0,3 - 0,1 - 1,7 - 1,2 = -3,45 \text{ tm}$$

$$\varphi/\varphi' = 70/30 \text{ ‰ mit } C_E/C_M = 0,104$$

Somit

$$F_{e \text{ ges}} = \frac{0,104 \cdot 3,45}{800 \cdot 0,45} = 10 \text{ cm}^2$$

Bewehrung oben:

$$F_e = 0,7 \cdot 10 = 7 \text{ cm}^2$$

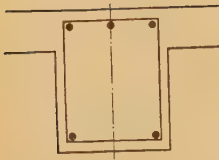
$$3 \text{ } \emptyset 18 = \dots \dots \dots 7,6 \text{ cm}^2$$

Bewehrung unten:

$$F_e' = 0,3 \cdot 10 = 3 \text{ cm}^2$$

$$2 \text{ } \emptyset 18 = \dots \dots \dots 5,1 \text{ cm}^2$$

$$F_{e \text{ ges}} = \underline{\underline{12,7 \text{ cm}^2}}$$



In Feld 5:

Bewehrung wie in Feld 4.

Untersuchung der Steifigkeit des berechneten Plattenbalkens

Wie zur Beurteilung eines Standkörpers (Wand, Pfeiler, Säule, Schornstein usw.) nicht nur die Errechnung der Spannung im Körper und des Bodendruckes unter dem Fundament, sondern an erster Stelle auch die Nachprüfung der Standsicherheit erforderlich ist, so muß bei den reinen Biegeköpern, im besonderen bei den Plattenbalken Klarheit gewonnen werden über die Steifigkeitsverhältnisse des Körpers, da diese von Einfluß sind auf die Größe der Biegemomente über den Stützen und im Zusammenhang damit auch auf die Spannungen. Zu diesem Zweck ist in der Stahlbetonstatik der Begriff der „Steifigkeitszahl“ gebildet worden. Man versteht darunter den Quotienten lx/J in den einzelnen Feldern. Bei Löser wird diese Größe mit l' bezeichnet. Mit ihrer Hilfe würden die richtigen Stützmomente berechnet werden können nach der Formel

$$X_e \cdot l_e' + 2 X_m (l_e' + l_r') + X_r \cdot l_r' = \Re_e \cdot l_e' + \Re_r \cdot l_r'$$

Die Durchführung dieses rein rechnerischen Verfahrens wäre aber nicht nur sehr umständlich, sondern auch mit Schwierigkeiten verbunden, die in angemessener Zeit kaum zu überwinden wäre, denn es müßte für jedes Balkenfeld das wirksame Trägheitsmoment J ermittelt werden nach den Formeln

$$J = \frac{b \cdot x^3}{3} + n [F_e (h - x)^2 + F_e' (h' - x)^2]$$

worin

$$x = -\frac{15 (F_e + F_e')}{b} + \sqrt{\left(\frac{15 (F_e + F_e')}{b}\right)^2 + \frac{30}{b} (F_e \cdot h + F_e' \cdot h')}$$

(vgl. Finter, Taf. V/18)

Die von mir aufgestellten Typenwerte ermöglichen eine sehr einfache Bestimmungsmethode, die sich wie folgt kurz ableiten läßt. Durch Verbindung der Formeln (5) und (2) entsteht die Gleichung

$$M = M_0 = \frac{(J_b + n \cdot J_e) \sigma_b}{x} = C_M \cdot b d^2 \cdot \sigma_b$$

oder wenn $x = \xi \cdot d$ gesetzt wird

$$\frac{J_b + n J_e}{\xi d} = C_M b \cdot d^3,$$

woraus

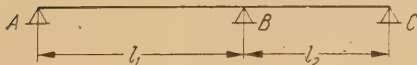
$$J_b + n \cdot J_e = J_{\text{ges}} = (C_M \cdot \xi) b d^3 \quad (22)$$

d.h. das Trägheitsmoment eines Stahlbetonquerschnittes ergibt sich, indem man aus dem Eignungsschaubild die Typenzahlen C_m und ξ entnimmt und diese miteinander sowie mit der Breite und der dritten Potenz der Höhe des Balkens multipliziert. Beachtet werden muß hierbei jedoch noch folgendes:

1. daß nicht die in vorstehender Rechnung benutzten C_M - und ξ -Werte einzusetzen sind, sondern die tatsächlichen Größen dieser Werte, d.h. diejenigen, die sich aus den gewählten Bemessungen und der tatsächlichen Bewehrung des Querschnittes ergeben;
2. daß bei Steifigkeits- wie auch bei Formänderungsuntersuchungen für n der Wert 10 einzusetzen ist.

Diese zweite Forderung wird erfüllt, wenn man — ausgehend von dem wirklichen C_E und dem wirklichen φ -Wert — den relativen Nulllinienabstand ξ dem Kurvenbild III entnimmt.

Indes führt folgende Überlegung noch zu weiterer Vereinfachung



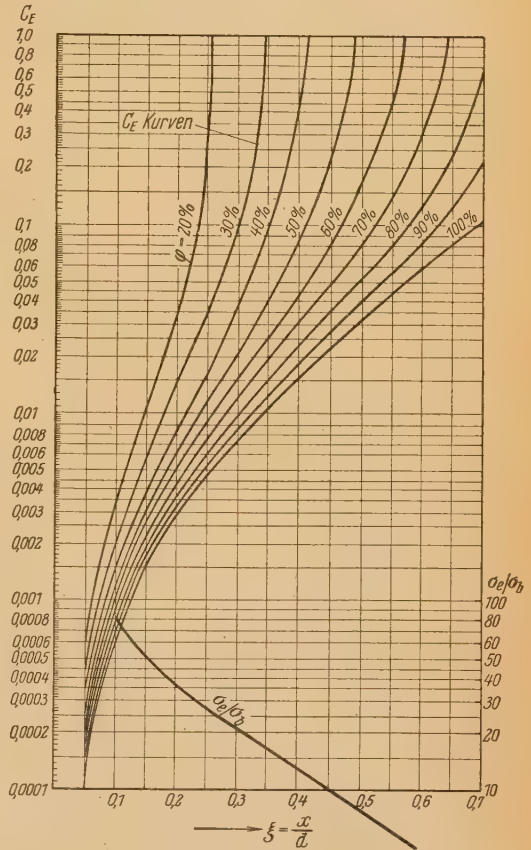
Nach Formel (22) kann nun gesetzt werden

$$J_c = (C_M \cdot \xi)_c b \cdot d^3$$

$$J_n = (C_M \cdot \xi)_n b \cdot d^3$$

und somit

$$l_n' = \frac{J_c}{J_n} l_n = \frac{(C_M \cdot \xi)_c}{(C_M \cdot \xi)_n} \cdot l_n,$$



Kurvenbild III

Nach dem Dreimomentensatz gilt für nebenstehende Figur

$$M_A \cdot l_1' + 2 M_B \cdot (l_1' + l_2') + M_C \cdot l_2' = \Re_e \cdot l_1' - \Re_r \cdot l_2.$$

da für Balken mit gleichbleibendem b und d diese Größen sich herauskürzen. Der Dreimomentensatz würde somit übergehen in

$$M_A \cdot \frac{(C_M \cdot \xi)_c}{(C_M \cdot \xi)_1} \cdot l_1 + 2 \cdot M_B \cdot \left[\frac{(C_M \cdot \xi)_c}{(C_M \cdot \xi)_1} l_1 + \frac{(C_M \cdot \xi)_c}{(C_M \cdot \xi)_2} \cdot l_2 \right] + \text{usw.}$$

Würde man nun weiter das Trägheitsmoment des Außenfeldes links, also I_1 gleich I_c annehmen, so würde diese Gleichung übergehen in

$$M_A \cdot l_1 + 2 \cdot M_B \left[l_1 + \frac{(C_M \cdot \xi)_1}{(C_M \cdot \xi)_2} l_2 \right] + \text{usw.}$$

auch könnte man noch in allen Gliedern durch l_1 dividieren, wodurch endgültig der Dreimomentensatz für den linken Anfang die Form erhalten würde

$$M_A \cdot 1 + 2 M_B \left[1 + \frac{l_1}{l_2} \frac{(C_M \cdot \xi)_1}{(C_M \cdot \xi)_2} \right] + M_c \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{(C_M \cdot \xi)_1}{(C_M \cdot \xi)_2} = \Re_e \cdot 1 + \Re_r \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{(C_M \cdot \xi)_1}{(C_M \cdot \xi)_2}.$$

Den Ausdruck

$$\frac{l_n}{l_1} \cdot \frac{(C_M \cdot \xi)_1}{(C_M \cdot \xi)_n} = C_{ln} = s_n \quad (23)$$

könnte man als „relative Steifigkeit“ des n -ten Feldes ansprechen. Für das linke Außenfeld wäre sie naturgemäß gleich 1.

Für das vorliegende Zahlenbeispiel würden sich die Größen wie folgt ergeben:

Im Feld 1:

$$C_E = \frac{38,1}{40,45} = 0,021$$

$$\varphi = \frac{28}{38,1} = 0,73; \quad \xi = 0,36$$

$$C_M = 0,17; \quad (C_M \cdot \xi)_1 = \underline{0,061}$$

$$C l_1 = s_1 = \underline{1}.$$

Im Feld 2:

$$C_E = \frac{25,5}{1800} = 0,0142$$

$$\varphi = \frac{15,3}{25,5} = 0,6; \quad \xi = 0,28$$

$$C_M = 0,13; \quad (C \cdot \xi)_2 = \underline{0,036}$$

$$C l_2 = s_2 = \frac{4,5}{5,9} \cdot \frac{0,061}{0,036} = \underline{1,3} \quad (0,71)$$

Im Feld 3:

$$C_E = \frac{20,3}{1800} = 0,0113$$

$$\varphi = \frac{15,2}{20,3} = 0,75; \quad \xi = 0,3$$

$$C_M = 0,13; \quad (C \cdot \xi)_3 = 0,039$$

$$C l_3 = s_3 = \frac{5,7}{5,9} \cdot \frac{0,061}{0,039} = \underline{1,5} \quad (0,66)$$

Im Feld 4:

$$C_E = \frac{10,2}{1800} = 0,0057$$

$$\varphi = \frac{5,1}{10,2} = 0,50; \quad \xi = 0,19$$

$$C_M = 0,091; \quad (C \cdot \xi)_4 = 0,0175$$

$$Cl_4 = s_4 = \frac{4,7}{5,9} \cdot \frac{0,061}{0,0175} = \underline{2,8} \quad (0,36)$$

Im Feld 5:

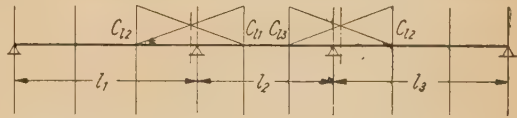
$$C_E = \frac{10,2}{1800} = 0,0057$$

$$\varphi = \frac{5,1}{10,2} = 0,5; \quad \xi = 0,19$$

$$C_M = 0,091; \quad (C \cdot \xi)_5 = 0,0175$$

$$Cl_5 = s_5 = \frac{3,6}{5,9} \cdot \frac{0,061}{0,0175} = \underline{2,1} \quad (0,48).$$

Die eigentlichen Steifigkeitsverhältnisse in den einzelnen Balkenfeldern kommen durch die (...) Zahlen zum Ausdruck. Sie sind die reziproken Werte der relativen Steifigkeitszahlen und lassen in Übereinstimmung mit der Anschauung erkennen, daß die Steifigkeit in den Abschnitten die größere ist, in denen sich auch die stärkere Bewehrung befindet. Man könnte sie die Steifigkeitsgrade nennen. Im Felde ganz links — dem Bezugsfeld — ist naturgemäß auch der Steifigkeitsgrad = 1.



Für die weitere Durchführung der Steifigkeitsuntersuchung ist nun zu empfehlen, die Stützenmomente nicht rechnerisch an Hand des Dreimomentensatzes zu ermitteln, sondern graphisch nach dem Festpunktverfahren, indem man die verschränkten Drittelslinien nach obiger Figur konstruiert.

Die weitere Bearbeitung ergibt dann für das vorliegende Zahlenbeispiel folgende

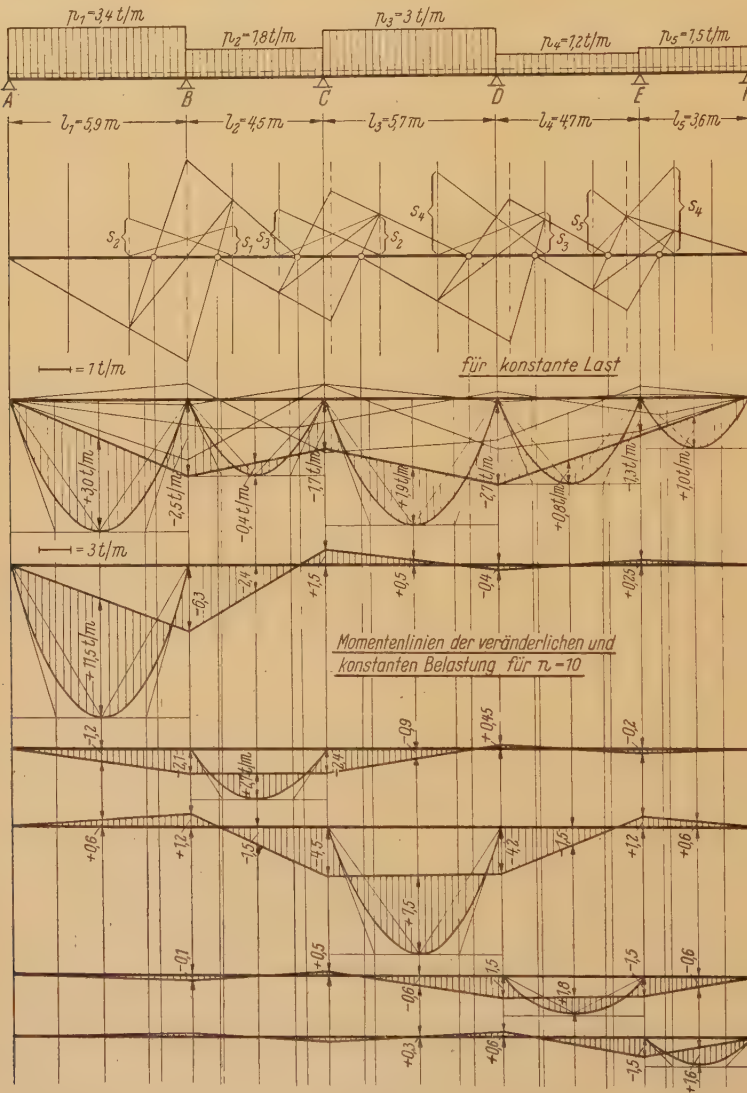
Momentenänderung

In den Feldern			Über den Stützen		
Feld	$M_n = 15$	$M_n = 10$	Stütze	$M_n = 15$	$M_n = 10$
1	+ 12,44	+ 13,0	A	—	—
2	— 7,37	— 4,28	B	— 11,0	— 9,25
3	+ 7,61	+ 9,07	C	— 8,86	— 7,91
4	+ 2,21	+ 2,07	D	— 8,64	— 6,9
5	+ 3,32	+ 2,9	E	— 3,45	— 3,59

Vergleiche Blatt V.

Es können nun auch die eigentlichen Materialspannungen nach folgendem Verfahren ermittelt werden:

1. C_E und φ berechnen auf Grund der gewählten Abmessungen wie bereits auf S. 56/57 geschehen;
2. mittels Stechzirkel die entsprechenden Kurvenpunkte auf Blatt II suchen, darunter den ξ -Wert und darüber den C_M -Wert ablesen;
3. σ_b errechnen aus $\sigma_b = \frac{M}{C_M \cdot b \cdot d^2}$, wobei die neu gefundenen M -Werte einzusetzen sind;



Blatt V.

4. Stahlspannung für die Zugseite errechnen aus

$$\sigma_e = 15 \sigma_b \cdot \frac{0,9 - \sigma_T}{\sigma_T}$$

5. desgleichen für die Druckseite aus

$$\sigma_e = 15 \sigma_b \cdot \frac{0,1 - \sigma_T}{\sigma_T}$$

Dieses Verfahren führt für das vorliegende Zahlenbeispiel auf folgende Spannungen:

Im Feld 1:

$$C_E = \frac{38,1}{1800} = 0,021; \quad \varphi = \frac{28,}{38,1} = 0,73$$

$$\xi = 0,415; \quad C_M = 0,21$$

$$\sigma_b = \frac{13}{0,21 \cdot 0,4 \cdot 0,45^2} = \frac{13}{0,21 \cdot 0,082} = \underline{\underline{75}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^+ = 15 \cdot 75 \cdot \frac{0,9 - 0,415}{0,415} = \dots \underline{\underline{1320}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^- = 15 \cdot 75 \cdot \frac{0,1 - 0,415}{0,415} = \dots \underline{\underline{-870}} \text{ kg/cm}^2$$

Über der Stütze B:

$$C_E = \frac{32,9}{1800} = 0,018; \quad \varphi = \frac{22,8}{32,9} = 0,7$$

$$\xi = 0,39; \quad C_M = 0,2$$

$$\sigma_b = \frac{9,25}{0,2 \cdot 0,082} = \dots \underline{\underline{56}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^+ = 15 \cdot 56 \cdot \frac{0,9 - 0,39}{0,39} = \dots \underline{\underline{1100}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^- = 15 \cdot 56 \cdot \frac{0,1 - 0,39}{0,39} = \dots \underline{\underline{-630}} \text{ kg/cm}^2$$

Im Felde 2:

$$C_E = \frac{25,5}{1800} = 0,0142; \quad \varphi = \frac{15,3}{25,5} = 0,6$$

$$\xi = 0,33; \quad C_M = 0,17$$

$$\sigma_b = \frac{4,28}{0,17 \cdot 0,082} = \dots \underline{\underline{31}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^+ = 15 \cdot 31 \cdot \frac{0,9 - 0,33}{0,33} = \dots \underline{\underline{800}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^- = 15 \cdot 31 \cdot \frac{0,1 - 0,33}{0,33} = \dots \underline{\underline{-310}} \text{ kg/cm}^2$$

Über Stütze C:

$$C_E = \frac{25,4}{1800} = 0,0142; \quad \varphi = \frac{20,3}{25,4} = 0,8$$

$$\xi = 0,39; \quad C_M = 0,16$$

$$\sigma_b = \frac{7,91}{0,16 \cdot 0,082} = \dots \underline{\underline{60}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^+ = 15 \cdot 60 \cdot \frac{0,9 - 0,39}{0,39} = \dots \underline{\underline{1180}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^- = 15 \cdot 60 \cdot \frac{0,1 - 0,39}{0,39} = \dots \underline{\underline{-680}} \text{ kg/cm}^2$$

In Feld 3:

$$C_E = \frac{20,3}{1800} = 0,0113; \varphi = \frac{15,2}{20,3} = 0,75$$

$$\xi = 0,35; C_M = 0,15$$

$$\sigma_b = \frac{9,07}{0,15 \cdot 0,082} = \dots \dots \dots \underline{\underline{73}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^+ = 15 \cdot 73 \cdot \frac{0,9 - 0,35}{0,35} = \dots \dots \dots \underline{\underline{1730}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^- = 15 \cdot 73 \cdot \frac{0,1 - 0,35}{0,35} = \dots \dots \dots \underline{\underline{-800}} \text{ kg/cm}^2$$

Über Stütze D:

$$C_E = \frac{28}{1800} = \underline{\underline{0,0156}}; \varphi = \frac{17,8}{28} = 0,64$$

$$\xi = 0,36; C_M = 19$$

$$\sigma_b = \frac{6,9}{0,19 \cdot 0,082} = \dots \dots \dots \underline{\underline{44}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^+ = 15 \cdot 44 \cdot \frac{0,9 - 0,36}{0,36} = \dots \dots \dots \underline{\underline{990}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^- = 15 \cdot 44 \cdot \frac{0,1 - 0,36}{0,36} = \dots \dots \dots \underline{\underline{-470}} \text{ kg/cm}^2$$

In Feld 4:

$$C_E = \frac{10,2}{1800} = 0,0057; \varphi = \frac{5,1}{10,2} = 0,5$$

$$\xi = 0,21; C_M = 0,11$$

$$\sigma_b = \frac{2,07}{0,11 \cdot 0,082} = \dots \dots \dots \underline{\underline{23}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^+ = 15 \cdot 23 \cdot \frac{0,9 - 0,21}{0,21} = \dots \dots \dots \underline{\underline{1150}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^- = 15 \cdot 23 \cdot \frac{0,1 - 0,21}{0,21} = \dots \dots \dots \underline{\underline{-182}} \text{ kg/cm}^2$$

Über Stütze E:

$$C_E = \frac{12,7}{1800} = 0,0070, \varphi = \frac{7,6}{12,7} = 0,6$$

$$\xi = 0,27; C_M = 0,125$$

$$\sigma_b = \frac{3,59}{0,125 \cdot 0,082} = \dots \dots \dots \underline{\underline{35}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^+ = 15 \cdot 35 \cdot \frac{0,9 - 0,27}{0,27} = \dots \dots \dots \underline{\underline{1230}} \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e^- = 15 \cdot 35 \cdot \frac{0,1 - 0,27}{0,27} = \dots \dots \dots \underline{\underline{-330}} \text{ kg/cm}^2$$

Im Felde 5:

$$C_E = \frac{10,2}{1800} = 0,057; \quad \varphi = \frac{5,1}{10,2} = 0,5$$

$$\xi = 0,21; \quad C_M = 0,11$$

$$\sigma_b = \frac{2,9}{0,11 \cdot 0,082} = \dots \dots \dots \underline{\underline{32 \text{ kg/cm}^2}}$$

$$\sigma_e^+ = 15 \cdot 32 \cdot \frac{0,9 - 0,21}{0,21} = \dots \dots \dots \underline{\underline{1580 \text{ kg/cm}^2}}$$

$$\sigma_e^- = 15 \cdot 32 \cdot \frac{0,1 - 0,21}{0,21} = \dots \dots \dots \underline{\underline{-250 \text{ kg/cm}^2}}$$

Die Untersuchung ergibt eine Überbeanspruchung in Feld 3 und 5, die durch ein Zulageisen in der Zugzone auszugleichen wäre.

Schluß

In obiger Arbeit ist gezeigt worden, wie solche Baukörper nach der Typenwertmethode berechnet werden können, deren Querschnitt rechteckig ist und auf welche die äußeren Kräfte rechtwinklig, d. h. in Richtung der Hauptachsen der Querschnitte einwirken.

Liegen nun anders gestaltete Körper und Querschnitte vor, z. B. runde oder vielkantige Säulen, Maste, Schornsteine usw., so könnten die Typenwerte der Stahlflächenmomente ebenfalls errechnet werden aus

$$C_S = \Sigma \varphi (q - \xi)$$

und

$$C_J = \Sigma \varphi (q - \xi)^2.$$

Jedoch müssen die Typenwerte der Betondruckflächen K_S und K_J dadurch ermittelt werden, daß auf die Typenfläche die Streifenmethode angewandt wird, was aber bei jeder Querschnittstypen ohne besondere Schwierigkeit möglich ist.

Wirkt endlich das resultierende Moment in irgend einem Winkel auf den Baukörper bzw. dessen meistgefährdete Querschnitte ein, dann muß auf den nach Maßgabe des ξ -Wertes sich ändernden wirksamen Anteil des Typenquerschnittes der Mohr'sche Kreis zur Ermittlung des Achsenwinkels ψ streifenweise in Anwendung gebracht werden. Sodann können mit Bezug auf die koordinierte Achse die Flächentypenwerte K_S , K_J , C_S und C_J ermittelt und das weitere zwecks Konstruktion der Eignungsschaubilder (der entsprechenden „Typenkurven“), die Last- und Momententypenwerte errechnet werden aus den Formeln

$$C_N = \frac{K_S - n \cdot C_E \cdot C_S}{\xi \sin \psi}$$

und

$$C_M = \frac{K_J + n C_E C_J}{\xi \sin \psi} + C_N (0,5 - \xi).$$

Diese Werte wiederum können dann in die Anwendungsformeln 1) bis 3) eingesetzt werden zum Zweck entweder der Nachrechnung vorhandener oder der Vorausberechnung neuer Querschnitte.

Theaterbalkonkonstruktion der Fall ist, oder sie gehen durch die „Zentralachse“, so daß ein „sektorförmiges“ Faltwerk entsteht (Bild 2). Die gekrümmten Faltwerke können so wie die ebenen äußerlich statisch bestimmt gelagert und als sogenannte „Balkensysteme“ ausgebildet werden. Man kann aber auch die Auflagerung aller oder auch nur einzelner Scheiben statisch unbestimmt vornehmen, wie dies zum Beispiel bei der in Bild 3 dargestellten, gekrümmten Brücke der Fall ist.

2. Aufstellung der Differentialgleichungen des Problems

a) Behandlung der ebenen Scheiben.

Wir nehmen an, daß die einzelnen Faltwerksglieder längs der kreisförmig gekrümmten Kanten n nur scharnierartig miteinander verbunden sind, so daß Biegemomente M_x , deren Achsen mit den Tangenten der Kantenkreise n zusammenfallen, und Querkräfte Q_x , welche lotrecht auf die Scheiben $n, n+1$ und $n+1, n+2$ usw. wirken, nicht übertragen werden können. Greift längs der Kanten n eine stetig verteilte äußere Kraft an, so wird diese auf statisch bestimmte Weise in die, in den Scheibenebenen wirkenden Komponenten $p_n, n+1, p_{n-1, n}$ zerlegt. Eine zwischen den Knotenlinien n und $n+1$ wirkende, stetig verteilte Last z. B. P_n (Bild 1) zerlegt sich nach der Culmann'schen Regel in die, in den drei benachbarten Scheiben wirkenden, stetig verteilten Belastungen $p_{n-1, n}, p_n, n+1, p_{n+1, n+2}$.

Wir schneiden nun aus dem gekrümmten Faltwerk einen Sektor mit dem Öffnungswinkel $d\varphi$ heraus, wodurch in jedem Tragwerksglied die inneren Kräfte M, N und Q frei werden (Bild 1). Trennen wir in diesem differentiellen Sektor die einzelnen Scheiben $n-1, n, n+1$ und $n+1, n+2$ durch Schnitte längs der Kantenkreise ab, so werden Verbindungskräfte frei, die wegen der Fußnote 1, in den Achsebenen der ebenen Scheiben wirken müssen. Wir zerlegen sie in einen tangentiellen Schubfluß t_n und in radiale Abtriebskräfte a_n . In Bild 4 sind die Elemente der beiden räumlichen Scheiben $n-1, n$ und $n+1, n+2$ und die der ebenen Scheibe $n, n+1$ mit ihren Schnittkräften M, N, Q, t, a und ihren äußeren Belastungen p in eine Ebene geklappt zur Darstellung gebracht. Die a_n sollen dann positiv sein, wenn sie auf die ebene Scheibe eine von der Zentralachse nach außen gerichtete Wirkung ausüben. Bei der räumlichen Scheibe $n-1, n$ erzeugen die im Abstand η vom oberen Rand $n-1$ tangentiell wirkenden Normalspannungen Abtriebskomponenten von der Größe

$$b_{n-1, n}^{(\eta)} \cdot \sigma_{n-1, n}^{(\eta)} \cdot d\varphi = \left[\frac{N_{n-1, n}}{F_{n-1, n}} + \frac{M_{n-1, n}}{J_{n-1, n}} (h_{0, n-1, n} - \eta) \right] b_{n-1, n} d\varphi,$$

deren Momentenbedingung um die Kreistangente $n-1$

$$\begin{aligned} d\varphi \int_0^{h_{n-1, n}} \left[\frac{N_{n-1, n}}{F_{n-1, n}} + \frac{M_{n-1, n}}{J_{n-1, n}} (h_{0, n-1, n} - \eta) \right] \eta \cdot b_{n-1, n}^{(\eta)} \cdot d\eta = \\ = a_{n, n+1} \cdot h_{n-1, n} \cdot d\varphi \end{aligned}$$

lautet (Bild 4a). Wertet man die Integrale aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} N_{n-1, n} \cdot h_{0, n-1, n} + \frac{M_{n-1, n}}{J_{n-1, n}} h_{0, n-1, n}^2 \cdot F_{n-1, n} - \\ - \frac{M_{n-1, n}}{J_{n-1, n}} (J_{n-1, n} + h_{0, n-1, n}^2 \cdot F_{n-1, n}) = a_{n, n+1} \cdot h_{n-1, n}, \end{aligned}$$

woraus nach Kürzungen die Abtriebskraft für den Rand n in der Form

$$a_{n, n+1} \cdot d\varphi = \left[N_{n-1, n} \cdot \frac{h_{0, n-1, n}}{h_{n-1, n}} - \frac{M_{n-1, n}}{h_{n-1, n}} \right] \cdot d\varphi$$

3. Scheibenelement $n+1, n+2$.

$$dN_{n+1, n+2} + (t_{n+1} \cdot R_{n+1, n+2} - t_{n+2} \cdot R_{n+1, n+2}) \cdot d\varphi = 0. \quad (7)$$

$$dQ_{n+1, n+2} + p_{n+1, n+2} \cdot R_{n+1, n+2} \cdot d\varphi = 0. \quad (8)$$

$$dM_{n+1, n+2} + (t_{n+1} \cdot R_{n+1, n+2} + t_{n+2} \cdot R_{n+1, n+2}) \cdot \frac{h_{n+1, n+2}}{2} \cdot d\varphi - Q_{n+1, n+2} \cdot R_{n+1, n+2} \cdot d\varphi = 0. \quad (9)$$

In diesen Ausdrücken haben die äußeren Belastungen $p_{n-1, n}$, $p_{n, n+1}$, $p_{n+1, n}$, $p_{n+1, n+2}$ und die Schubkräfte t_n die Dimension l/m . Alle Wirkungsgrößen sind reine Funktionen des Bogenargumentes φ . Ihre positiven Richtungssinne sind durch die in Bild 4 eingezeichneten Pfeilrichtungen festgelegt.

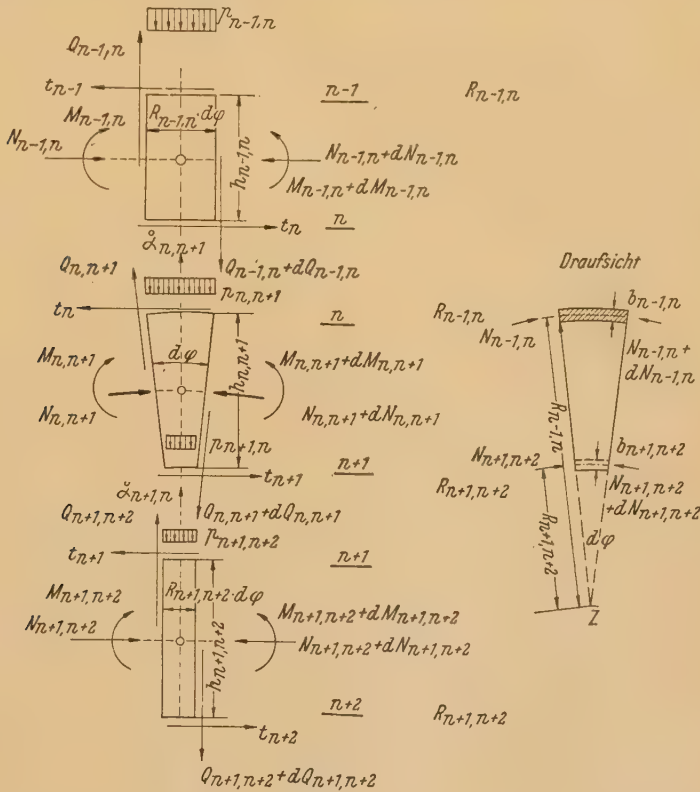


Bild 4

Differentiiert man die Gl. (5) zweimal nach φ , so erhält man

$$Q''_{n, n+1} - N''_{n, n+1} - \frac{1}{2} N''_{n-1, n} - \frac{1}{2} \cdot N''_{n+1, n+2} + \frac{M''_{n-1, n}}{h_{n-1, n}} - \frac{M''_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} + p''_{n, n+1} \cdot R_{n-1, n} + p''_{n+1, n} \cdot R_{n+1, n+2} = 0. \quad (10)$$

Differentiiert man weiter die Gl. (1) und (7), (3) und (9) und Gl. (4) je einmal nach φ und setzt diese Ergebnisse in Gl. (10) ein, so folgt mit Gl. (2 u. 8) die lineare Differentialgleichung

$$Q_{n,n+1}''' + Q_{n,n+1}' = \frac{p_{n-1,n} \cdot R_{n-1,n}^2 - p_{n+1,n+2} \cdot R_{n+1,n+2}^2}{h_{n-1,n} \cdot h_{n+1,n+2}} \cdot \frac{\chi(\varphi)}{v; n, n+1} - \frac{p_{n,n+1}'' \cdot R_{n-1,n} - p_{n+1,n}'' \cdot R_{n+1,n+2}}{\chi(\varphi)} = \chi(\varphi), \quad (11)$$

$h; n, n+1$

deren allgemeines Integral

$$Q_{n,n+1} = A_{n,n+1} \cdot \sin \varphi + B_{n,n+1} \cdot \cos \varphi + C_{n,n+1} + \frac{0}{n, n+1} \eta(\varphi) \quad (12)$$

lautet, wobei

$$\eta_{n,n+1} = \int \sin \varphi \cdot d\varphi \int \chi(\varphi) \cdot \cos \varphi \, d\varphi - \int \cos \varphi \cdot d\varphi \int \chi(\varphi) \cdot \sin \varphi \, d\varphi$$

bedeutet. Mehrere Umformungen durch partielle Integration ergeben weiter

$$\begin{aligned} \eta_{n,n+1} = & -\sin \varphi \int \chi(\varphi) \cdot \sin \varphi \, d\varphi - \cos \varphi \int \chi(\varphi) \cdot \cos \varphi \, d\varphi + \\ & + \int \chi(\varphi) \cdot d\varphi - \sin \varphi \int \chi(\varphi) \cdot \sin \varphi \, d\varphi - \cos \varphi \int \chi(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi. \end{aligned} \quad (11a)$$

Wir lassen in Hinkunft den Radiusvektor $\varphi = 0$ mit der Symmetrieachse des Tragwerkes zusammenfallen. Ist dann die Belastung zu dieser Achse symmetrisch, so muß $Q_{n,n+1}$ zu ihr antimetrisch sein, d.h. es wird

$$B_{n,n+1} = C_{n,n+1} = 0$$

und Gl. (12) geht über in

$$Q_{n,n+1} = A_{n,n+1} \cdot \sin \varphi + \frac{0}{n, n+1} \eta(\varphi). \quad (13)$$

Ist hingegen die Belastung zur Symmetrieachse antimetrisch, so wird $Q_{n,n+1}$ hierzu symmetrisch und Gleichung (12) geht über in

$$Q_{n,n+1} = B_{n,n+1} \cdot \cos \varphi + C_{n,n+1} + \frac{0}{n, n+1} \eta(\varphi). \quad (14)$$

Für Gleichlasten wird in Gl. (12)

$$\eta_{n,n+1} = \frac{0}{\eta_{n,n+1}}; p = \left(\frac{p_{n-1,n}}{h_{n-1,n}} \cdot R_{n-1,n}^2 - \frac{p_{n+1,n+2}}{h_{n+1,n+2}} \cdot R_{n+1,n+2}^2 \right). \quad (11b)$$

Für jede ebene Falte besteht eine solche Differentialgleichung (11).

b) Spannungsgleichsetzung.

Längs der Kanten n müssen die Biegespannungen der angrenzenden Scheiben punktweise übereinstimmen. Sind die Querschnitte aller Falten Rechtecke, so ergibt diese Spannungsgleichsetzung für die Kante n

$$\frac{6 M_{n-1,n}}{b_{n-1,n} \cdot h_{n-1,n}^2} + \frac{6 M_{n,n+1}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}^2} - \frac{N_{n-1,n}}{b_{n-1,n} \cdot h_{n-1,n}} + \frac{N_{n,n+1}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} = 0. \quad (15)$$

Differenziert man Gl. (15) zweimal nach φ , setzt die einmal differenzierten Gl. (3), (6), (1) und (4) ein, formt um und ersetzt aus Gl. (2) $Q'_{n-1,n}$, so ergeben sich die simultanen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned}
 & t'_{n-1} \frac{R_{n-1,n}}{b_{n-1,n} \cdot h_{n-1,n}} + t'_n \cdot \left[\frac{2 R_{n-1,n}}{b_{n-1,n} \cdot h_{n-1,n}} + \frac{2 R_{n-1,n}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} \right] + \\
 & + t'_{n+1} \frac{R_{n+1,n+2}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} = Q'_{n-1,n} \cdot \frac{3 R_{n-1,n}}{b_{n-1,n} \cdot h_{n-1,n}^2} + \\
 & + \underline{Q'_{n,n+1}} \left[\frac{3 (R_{n-1,n} + R_{n+1,n+2})}{2 \cdot b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}^2} - \frac{1}{2 b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} \right], \quad (16)
 \end{aligned}$$

wobei man mit Hilfe von Gl. (2) für das erste Glied der rechten Seite auch

$$- p_{n-1,n} \frac{3 R_{n-1,n}^2}{b_{n-1,n} \cdot h_{n-1,n}^2}$$

schreiben kann.

Führt man auch für die Kante $n+1$ die entsprechenden Rechenoperationen durch, so erhält man die zu den Gl. (16) analogen Beziehungen

$$\begin{aligned}
 & t'_n \frac{R_{n-1,n}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} + t'_{n+1} \cdot \left[\frac{2 R_{n+1,n+2}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} + \frac{2 R_{n+1,n+2}}{b_{n+1,n+2} \cdot h_{n+1,n+2}} \right] + \\
 & + t'_{n+2} \frac{R_{n+1,n+2}}{b_{n+1,n+2} \cdot h_{n+1,n+2}} = Q'_{n+1,n+2} \frac{3 R_{n+1,n+2}}{b_{n+1,n+2} \cdot h_{n+1,n+2}^2} + \\
 & + \underline{Q'_{n,n+1}} \left[\frac{3 (R_{n-1,n+1} + R_{n+1,n+2})}{2 b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}^2} - \frac{1}{2 b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} \right], \quad (17)
 \end{aligned}$$

wobei man mit Hilfe der Gl. (8) für das erste Glied der rechten Seite auch

$$- p_{n+1,n+2} \frac{3 R_{n+1,n+2}}{b_{n+1,n+2} \cdot h_{n+1,n+2}^2}$$

schreiben kann.

In beiden Gleichungssystemen sind die $Q_{n,n+1}$ und die $p_{n-1,n}$, $p_{n+1,n+2}$ reine Funktionen von φ , ihre Beiwerte hingegen unabhängig hiervon. Differenziert man Gl. (12) einmal nach φ , so ergibt sich

$$Q'_{n,n+1} = A_{n,n+1} \cdot \cos \varphi - B_{n,n+1} \cdot \sin \varphi + \overset{0}{\eta'_{n,n+1}}. \quad (18)$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungssysteme (16) und (17) ein und löst diese nach t'_n auf, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & t'_n = \cos \varphi \sum_1^{\frac{m}{2}} (q_{n,2\nu-1} + q_{n,2\nu}) A_{2\nu-1,2\nu} - \\
 & - \sin \varphi \sum_1^{\frac{m}{2}} (q_{n,2\nu-1} + q_{n,2\nu}) B_{2\nu-1,2\nu} + \\
 & + \sum_1^{\frac{m}{2}} (q_{n,2\nu-1} + q_{n,2\nu}) \cdot \overset{0}{\eta'_{2\nu-1,2\nu}} - \sum_1^{\frac{m}{2}} \left(\overset{0}{p_{n,2\nu-1}} + \overset{0}{p_{n,2\nu}} \right) \cdot p_{2\nu-1,2\nu} \\
 & n = 1, 2, 3 \dots m, \quad (19)
 \end{aligned}$$

wenn m die Anzahl der t_n ist. Da jedes räumliche Faltwerksglied an jeder ihrer Kanten zwecks Aufnahme der Abtriebskräfte von einer ebenen Scheibe begrenzt sein muß, beträgt die Anzahl der ebenen Scheiben $\frac{m}{2} + 1$, wenn $\frac{m}{2}$ die Anzahl der räumlichen Scheiben beträgt. Da zu jeder der letzteren immer 2 Schubflüsse t_n gehören, beträgt die Anzahl dieser immer $2 \frac{m}{2} = m$. Sie muß immer eine gerade Zahl sein. Aus Gl. (19) ergibt sich durch Integration die Größe des Schubflusses selbst zu

$$\begin{aligned}
 t_n = & \sin \varphi \cdot \sum_{1}^{\frac{m}{2}} (q_{n, 2\nu-1} + q_{n, 2\nu}) \cdot \overline{A_{2\nu-1, 2\nu}} + \\
 & + \cos \varphi \cdot \sum_{1}^{\frac{m}{2}} (q_{n, 2\nu-1'} + q_{n, 2\nu}) \cdot \overline{B_{2\nu-1, 2\nu}} + \\
 & + \sum_{1}^{\frac{m}{2}} (q_{n, 2\nu-1} + q_{n, 2\nu}) \cdot \overline{\eta_{2\nu-1, 2\nu}} - \sum_{1}^{\frac{m}{2}} (p_{n, 2\nu-1} + p_{n, 2\nu}) \int p_{2\nu, 2\nu+1} d\varphi + C_n \\
 & n = 1, 2, 3 \dots m.
 \end{aligned} \quad (20)$$

Alle bisherigen Betrachtungen und Entwicklungen gelten für jedes kreisförmig gekrümmte Faltwerk nach der in der Einleitung beschriebenen Bauart, ganz gleichgültig, wie es belastet und die einzelnen Falten gelagert sind. Will man aber das in Gleichung (20) dargestellte allgemeine Integral der Bestimmungsgleichungen (16) und (17) an die Randbedingungen des Problems anpassen, so muß man auf die Belastungs- und Lagerungsart des Tragwerkes eingehen. Wir wollen in der Folge den diesbezüglichen Weg für ein sogenanntes „Balkensystem“ vorführen, bei welchem auch jedes einzelne Tragglied balkenartig gelagert ist.

3. Das Balkensystem

In dem Lösungssystem (20) treten $\left(\frac{m}{2} + 1\right) 2 = m + 2$ Konstante $A_{2\nu-1, 2\nu}$ und $B_{2\nu-1, 2\nu}$ und m Konstante C_n , im ganzen also $2m + 2$ zu bestimmende Integrationskonstante auf. Hierfür stehen zunächst für jede ebene Scheibe die beiden Gleichgewichtsbedingungen $H = V = 0$, also $\left(\frac{m}{2} + 1\right) 2 = m + 2$ Bedingungen zur Verfügung. Berücksichtigt man, daß für die Endfalte 12 der Rand 1 kraftfrei sein muß, so liefert, da die Wirkungslinien der Abtriebskräfte und die der äußeren Belastungen p die Zentralachse schneiden, die Momentenbedingung um die letztere

$$\begin{aligned}
 & + \Phi \\
 R_{23} \int_{-\Phi}^{+\Phi} t_2 \cdot d\varphi = 0. \quad (21) \\
 & - \Phi
 \end{aligned}$$

Stellt man auch für die angrenzende räumliche Scheibe 23 diese Bedingung auf, so folgt mit Gl. (21)

$$\begin{aligned}
 & + \Phi \\
 R_{23} \int_{-\Phi}^{+\Phi} (t_2 - t_3) d\varphi = - R_{23} \int_{-\Phi}^{+\Phi} t_3 \cdot d\varphi \\
 & - \Phi
 \end{aligned}$$

oder allgemein

$$R_n \int_{-\Phi}^{+\Phi} t_n \cdot d\varphi = 0,$$

was wieder m Gleichungen ergibt, so daß nun $2m + 2$ Integrationskonstanten $(m + 2) + m = 2m + 2$ Bestimmungsgleichungen gegenüber stehen.

Wir wollen nun diesen allgemeinen Weg der Konstantenbestimmung für das Balkensystem bei beliebiger Belastung auch rechnungsmäßig durchführen. Zunächst bestimmen wir die Abtriebskräfte (siehe Seite 63 u. Bild 4a). Bedenken wir, daß für $\varphi = \pm \Phi$ alle Biegemomente und Normalkräfte Null sein müssen, so ergibt der Ansatz

$$\begin{aligned} \int_{-\Phi}^{\varphi} \left(\frac{1}{2} N'_{n-1, n} + \frac{1}{2} N'_{n+1, n+2} - \frac{M'_{n+1, n+2}}{h_{n-1, n}} + \frac{M'_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} \right) d\varphi = \\ = \frac{1}{2} N_{n-1, n} + \frac{1}{2} N_{n+1, n+2} - \frac{M_{n-1, n}}{h_{n-1, n}} + \frac{M_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} = \\ = R_{n-1, n} \int_{-\Phi}^{\varphi} t_n \cdot d\varphi - R_{n+1, n+2} \int_{-\Phi}^{\varphi} t_{n+1} \cdot d\varphi - \\ - \frac{R_{n-1, n}}{h_{n-1, n}} \int_{-\Phi}^{\varphi} Q_{n-1, n} \cdot d\varphi + \frac{R_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} \int_{-\Phi}^{\varphi} Q_{n+1, n+2} \cdot d\varphi^2 \end{aligned} \quad (24)$$

die gewünschten Abtriebskräfte als Funktion von φ . Aus den Gl. (2) u. (8) folgt durch bestimmte Integration

$$Q_{n-1, n} = -R_{n-1, n} \int_0^{\varphi} p_{n-1, n} \cdot d\varphi + Q_{n-1, n}^0 \quad (25a)$$

und

$$Q_{n+1, n+2} = -R_{n+1, n+2} \int_0^{\varphi} p_{n+1, n+2} \cdot d\varphi + Q_{n+1, n+2}^0, \quad (25b)$$

wenn die zweiten Glieder der rechten Seite die Querkräfte $Q_{n-1, n}$, $Q_{n+1, n+2}$ für $\varphi = 0$ bedeuten.

Wir zerlegen für die Folge die allgemeine stetige Belastung in einen zu $\varphi = 0$ symmetrischen und in einen hierzu antimetrischen Teil.

a) Symmetrische Last.

Hierfür ist zunächst

$$Q_{n-1, n}^0 = Q_{n+1, n+2}^0 = 0$$

und aus Gl. (20)

$$t_n = \bar{A}_n \cdot \sin \varphi + \bar{\eta}_n, \quad (26)$$

wobei $\bar{\eta}_n$ antimetrisch zu $\varphi = 0$ ist.

Die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verdrehung um die Zentralachse und gegen Verschieben normal zu $\varphi = 0$ sind für jede ebene Falte aus Symmetriegründen von Haus aus erfüllt. Es verbleibt also nur die Bedingung gegen Verschieben parallel $\varphi = 0$.

²⁾ Man setze Gl. (1), (7), (3) und (9) ein.

Wir müssen nun zunächst die Resultierende der Abtriebskräfte in Richtung $\varphi = 0$ ermitteln. Setzen wir die Gl. (26) in die Gl. (24) ein, multiplizieren mit $\cos \varphi$ und integrieren bestimmt von $-\Phi$ bis 0, so ergibt sich unter Bedachtnahme auf die Gl. (25a) und (25b) diese Resultierende zu

$$\begin{aligned} \uparrow = & \frac{1}{4} (2\Phi - \sin 2\Phi) (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{A}_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot \bar{A}_n) - R_{n+1, n+2} \cdot \\ & \cdot \int_{-\Phi}^0 \cos \varphi \cdot d\varphi \int_{-\Phi}^0 \bar{\eta}_{n+1} d\varphi + R_{n-1, n} \int_{-\Phi}^0 \cos \varphi d\varphi \int_{-\Phi_n}^0 \bar{\eta}_n \cdot d\varphi - \\ & - \frac{R_{n+1, n+2}^2}{h_{n+1, n+2}} \int_{-\Phi}^0 \cos \varphi d\varphi \int_{-\Phi}^{\varphi} d\varphi \int_0^{\varphi} \bar{p}_{n+1, n+2} \cdot d\varphi + \\ & + \frac{R_{n-1, n}^2}{h_{n-1, n}} \int_{-\Phi}^0 \cos \varphi d\varphi \int_{-\Phi}^{\varphi} d\varphi \int_0^{\varphi} \bar{p}_{n-1, n} \cdot d\varphi, \end{aligned} \quad (27)$$

wenn

$$\int_{-\Phi}^0 \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{4} (2\Phi - \sin 2\Phi)$$

ist. Außerdem haben die t_n und t_{n+1} der Scheibe $n, n+1$ ebenfalls eine Resultierende parallel $\varphi = 0$. Diese erhalten wir mit Hilfe der Gl. (26) zu

$$\begin{aligned} \uparrow = & - \int_{-\Phi}^0 (t_{n+1} \cdot R_{n+1, n+2} - t_n \cdot R_{n-1, n}) \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \\ = & - \frac{1}{4} (2\Phi - \sin 2\Phi) (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{A}_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot \bar{A}_n) - \\ & - R_{n+1, n+2} \cdot \int_{-\Phi}^0 \bar{\eta}_{n+1} \cdot \sin \varphi d\varphi - R_{n-1, n} \cdot \int_{-\Phi}^0 \bar{\eta}_n \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi, \end{aligned} \quad (28)$$

Für $\varphi = -\Phi$ wird die Querkraft aus Gl. (13)

$$\uparrow \bar{Q}_{n, n+1} = -A_{n, n+1} \sin \Phi + \left[\frac{0}{\eta_{n, n+1}} \right]_{\varphi = -\Phi}, \quad (29)$$

deren Komponente parallel $\varphi = 0$

$$\bar{Q}_{n, n+1} \cdot \cos \Phi = -\frac{1}{2} A_{n, n+1} \sin 2\Phi + \left[\frac{0}{\eta_{n, n+1}} \right]_{\varphi = -\Phi} \cdot \cos \Phi$$

beträgt. Beachtet man noch, daß die Resultierende der an der ebenen Scheibe $n, n+1$ angreifenden, äußeren Belastungen $\bar{p}_{n, n+1}$ und $\bar{p}_{n+1, n}$ sich zu

$$\uparrow = -R_{n+1, n+2} \int_{-\Phi}^0 \bar{p}_{n+1, n} \cdot \cos \varphi d\varphi - R_{n-1, n} \cdot \int_{-\Phi}^0 \bar{p}_{n, n+1} \cdot \cos \varphi d\varphi \quad (31)$$

ergibt, so lautet, da der Beiwert von

$$(R_{n+1, n+2} \cdot \bar{A}_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot \bar{A}_n)$$

Null wird, die Bestimmungsgleichung für die $A_{n, n+1}$

$$\begin{aligned} A_{n, n+1} \cdot \sin 2\Phi = & -2 \int_{-\Phi}^0 \cos \varphi d\varphi \int_{-\Phi}^{\varphi} \underbrace{(R_{n+1, n+2} \cdot \bar{\eta}_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot \bar{\eta}_n)}_{J_0} d\varphi - \\ & -2 \int_{-\Phi}^0 (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{\eta}_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot \bar{\eta}_n) \cdot \sin \varphi d\varphi - \\ & -2 \int_{-\Phi}^0 \cos \varphi d\varphi \int_{-\Phi}^{\varphi} \underbrace{\left[\frac{R_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} \bar{Q}_{n+1, n+2} - \frac{R_{n-1, n}}{h_{n-1, n}} \bar{Q}_{n-1, n} \right]}_{J_{00}} d\varphi - \\ & -2 \int_{-\Phi}^0 (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{p}_{n+1, n} + R_{n-1, n} \cdot \bar{p}_{n, n+1}) \cos \varphi d\varphi + \\ & + 2 \bar{\eta}_{n, n+1} (-\Phi) \cdot \cos \Phi = 2J' + 2J'' + 2J_1' + 2J_2 + 2 \bar{\eta}_{n, n+1} (-\Phi) \cdot \cos \Phi, \end{aligned} \quad (31a)$$

wenn

$$-R_{\nu} \int_0^{\varphi} \bar{p}_{\nu} \cdot d\varphi = \bar{Q}_{\nu} \quad (31b)$$

bedeutet. Formt man J' durch partielle Integration um, so ergibt sich

$$2J' = -2 \int_{-\Phi}^0 (d \sin \varphi) \cdot J_0 = -2 \sin \varphi \cdot J_0 \Big|_{-\Phi}^0 - \underbrace{0}_{0} - 2J'',$$

so daß sich die beiden ersten Integrale gegenseitig aufheben. Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned} 2J_1' = & -2 \int_{-\Phi}^0 (d \sin \varphi) \cdot J_{00} = -\sin \varphi \cdot J_{00} \Big|_{-\Phi}^0 + \\ & + 2 \int_{-\Phi}^0 \sin \varphi \left[\frac{R_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} \bar{Q}_{n+1, n+2} - \frac{R_{n-1, n}}{h_{n-1, n}} \bar{Q}_{n-1, n} \right] d\varphi. \end{aligned}$$

Setzt man für $\bar{Q}_{\nu}$ den obigen Wert ein und integriert noch einmal partiell, so folgen die endgültigen Gleichungen

$$\begin{aligned}
 A_{n,n+1} \cdot \sin \Phi = \frac{1}{\cos \Phi} \int_{-\Phi}^0 & \left[\left(\frac{R_{n+1,n+2}^2}{h_{n+1,n+2}} \cdot \bar{p}_{n+1,n+2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{R_{n-1,n}^2}{h_{n-1,n}} \bar{p}_{n-1,n} \right) (\cos \varphi - \cos \Phi) - \right. \\
 & \left. - \cos \varphi (R_{n+1,n+2} \cdot \bar{p}_{n+1,n} + R_{n-1,n} \cdot \bar{p}_{n,n+1}) \right] d\varphi + \frac{0}{n,n+1} \eta(-\Phi). \quad (32)
 \end{aligned}$$

b) Antimetrische Belastung.

Bedenkt man, daß für eine solche

$$t_n = \bar{B}_n \cdot \cos \varphi + C_n + \bar{\eta}_n \quad (33)$$

ist, so ergibt sich zunächst die Verdrehungsbedingung (23) in der Form

$$\begin{aligned}
 & +\Phi \quad +\Phi \\
 R_{n-1,n} \int_{-\Phi}^{\Phi} t_n \cdot d\varphi &= R_{n-1,n} \cdot \int_{-\Phi}^{\Phi} (\bar{B}_n \cos \varphi + \bar{\eta}_n + C_n) d\varphi = \\
 & = +2 R_{n-1,n} \cdot (\bar{B}_n \sin \Phi + \int_{-\Phi}^{\Phi} \bar{\eta}_n \cdot d\varphi + \Phi \cdot C_n) = 0, \quad (34)
 \end{aligned}$$

wobei $\bar{\eta}_n$ in Bezug auf $\varphi = 0$ symmetrisch ist.

Daraus ergibt sich

$$C_n = -\frac{\sin \Phi}{\Phi} \bar{B}_n - \frac{1}{\Phi} \int_{-\Phi}^0 \bar{\eta}_n \cdot d\varphi, \quad (35)$$

wodurch zunächst die Anzahl der zu bestimmenden Konstanten um die Hälfte verringert ist.

Infolge der Antimetrie ist die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben parallel $\varphi = 0$ von Haus aus erfüllt, so daß nur die Bedingung gegen Verschieben senkrecht zu $\varphi = 0$ übrig bleibt.

Die Resultierende der Abtriebskräfte senkrecht zu $\varphi = 0$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \rightarrow &= -\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\Phi - \sin \Phi \right) (R_{n+1,n+2} \cdot \bar{B}_{n+1} - R_{n+1,n} \cdot \bar{B}_n) - \\
 & - (\sin \Phi - \Phi) \cdot (R_{n+1,n+2} \cdot C_{n+1} - R_{n-1,n} \cdot C_n) - \\
 & - \int_{-\Phi}^0 \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot \int_{-\Phi}^{\varphi} (R_{n+1,n+2} \cdot \bar{\eta}_{n+1} - R_{n-1,n} \cdot \bar{\eta}_n) d\varphi + \\
 & + \int_{-\Phi}^0 \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot \int_{-\Phi}^{\varphi} \left(\frac{R_{n+1,n+2}}{h_{n+1,n+2}} \cdot \bar{Q}_{n+1,n+2} - \frac{R_{n-1,n}}{h_{n-1,n}} \cdot \bar{Q}_{n-1,n} \right) d\varphi + \\
 & + (\sin \Phi - \Phi) \left(\frac{R_{n+1,n+2}}{h_{n+1,n+2}} \cdot \bar{Q}_{n+1,n+2} - \frac{R_{n-1,n}}{h_{n-1,n}} \cdot \bar{Q}_{n-1,n} \right), \quad (36)
 \end{aligned}$$

wenn

$$\int_{-\Phi}^0 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = -\Phi \cos \Phi + \sin \Phi$$

und

$$-R_\nu \int_{-0}^{\varphi} \bar{p}_\nu \cdot d\varphi = \bar{Q}_\nu$$

ist. Die Komponente senkrecht zu $\varphi = 0$ der Schubflüsse t_n und t_{n+1} erhalten wir auf dieselbe Weise wie bei der symmetrischen Belastung. Es wird

$$\begin{aligned} \rightarrow &= - \int_{-\Phi}^0 (R_{n-1, n} \cdot t_n - R_{n+1, n+2} \cdot t_{n+1}) \cdot \cos \varphi \, d\varphi = \\ &= + \frac{1}{4} (2\Phi + \sin 2\Phi) (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{B}_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot \bar{B}_n) + \\ &\quad + \sin \Phi (R_{n+1, n+2} \cdot C_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot C_n) + \\ &\quad + \int_{-\Phi}^0 (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{\eta}_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot \bar{\eta}_n) \cdot \cos \varphi \, d\varphi. \end{aligned} \quad (37)$$

Die Querkraft für $\varphi = -\Phi$ findet man aus Gl. (14) zu

$$\bar{Q}_{n, n+1} = B_{n, n+1} \cdot \cos \Phi + C_{n, n+1} + \left[\frac{0}{\bar{\eta}_{n, n-1}} \right]_{\varphi = -\Phi}. \quad (38)$$

Ihre Komponente senkrecht zu $\varphi = 0$ beträgt

$$\begin{aligned} \rightarrow &= -\bar{Q}_{n, n+1} \cdot \sin \Phi = -\frac{1}{2} B_{n, n+1} \sin 2\Phi - \\ &\quad - C_{n, n+1} \cdot \sin \Phi - \left[\frac{0}{\bar{\eta}_{n, n+1}} \right]_{\varphi = -\Phi} \cdot \sin \Phi. \end{aligned} \quad (39)$$

Beachtet man, daß die Resultierende parallel $\varphi = 0$ der äußeren Belastungen $\bar{p}_{n, n+1}$ und $\bar{p}_{n+1, n}$ sich zu

$$\rightarrow = -R_{n+1, n+2} \cdot \int_{-\Phi}^0 \bar{p}_{n+1, n} \cdot \sin \varphi \, d\varphi - R_{n-1, n} \cdot \int_{-\Phi}^0 \bar{p}_{n, n+1} \cdot \sin \varphi \, d\varphi \quad (40)$$

ergibt, so lautet die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben senkrecht zu $\varphi = 0$

$$\begin{aligned} &+ \sin \Phi (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{B}_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot \bar{B}_n) + \Phi (R_{n+1, n+2} \cdot C_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot C_n) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot B_{n, n+1} \cdot \sin 2\Phi - C_{n, n+1} \cdot \sin \Phi = \\ &= + \int_{-\Phi}^0 \sin \varphi \cdot d\varphi \int_{-\Phi}^{\varphi} (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{\eta}_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot \bar{\eta}_n) \, d\varphi - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-\Phi}^0 \sin \varphi \cdot d\varphi \int_{-\Phi}^{\varphi} \left(\frac{R_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} \bar{Q}_{n+1, n+2} - \frac{R_{n-1, n}}{h_{n-1, n}} \bar{Q}_{n-1, n} \right) d\varphi - \\
& - (\sin \Phi - \Phi) \left(\frac{R_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} \cdot \frac{0}{\bar{Q}_{n+1, n+2}} - \frac{R_{n-1, n}}{h_{n-1, n}} \cdot \frac{0}{\bar{Q}_{n-1, n}} \right) \\
& - \int_{-\Phi}^0 (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{\eta}_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot \bar{\eta}_n) \cdot \cos \varphi d\varphi + \left[\frac{0}{\bar{\eta}_{n, n+1}} \right]_{\varphi=-\Phi} \cdot \sin \Phi + \\
& + R_{n+1, n+2} \int_{-\Phi}^0 \bar{p}_{n+1, n} \cdot \sin \varphi d\varphi - R_{n-1, n} \int_{-\Phi}^0 \bar{p}_{n, n+1} \cdot \sin \varphi d\varphi. \quad (41)
\end{aligned}$$

Setzen wir in Gl. (6) für t_n und t_{n+1} die Werte der Gl. (33) und für $Q_{n, n+1}$ den Wert der Gl. (14) und bedenken, daß für $\varphi = -\Phi$ und für $\varphi = 0$ das Moment $M_{n, n+1} = 0$ wird, so liefert die bestimmte Integration von $-\Phi$ bis 0

$$\begin{aligned}
& \int_{-\Phi}^0 M'_{n, n+1} d\varphi = \left(\frac{B_{n, n+1}}{\sin \Phi} + \int_{-\Phi}^0 \frac{0}{\bar{\eta}_{n, n+1}} d\varphi + \frac{C_{n, n+1}}{\sin \Phi} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \\
& \cdot (R_{n-1, n} + R_{n+1, n+2}) + \left(\bar{B}_n \cdot \sin \Phi + \int_{-\Phi}^0 \frac{0}{\bar{\eta}_n} d\varphi + C_n \cdot \Phi \right) R_{n-1, n} \cdot \frac{h_{n-1, n}}{2} + \\
& + \left(\bar{B}_{n+1} \sin \Phi + \int_{-\Phi}^0 \frac{0}{\bar{\eta}_{n+1}} d\varphi + C_{n+1} \cdot \Phi \right) \cdot R_{n+1, n+2} \cdot \frac{h_{n+1, n+2}}{2} = 0. \quad (42)
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Gl. (34), so ergibt sich die noch fehlende Verknüpfung zwischen $C_{n, n+1}$ und $B_{n, n+1}$ zu

$$\frac{C_{n, n+1}}{\sin \Phi} = - \frac{\sin \Phi}{\Phi} \frac{B_{n, n+1}}{\sin \Phi} - \frac{1}{\Phi} \int_{-\Phi}^0 \frac{0}{\bar{\eta}_{n, n+1}} d\varphi. \quad (43)$$

Mit Hilfe der Gl. (35) kann man nun

$$\begin{aligned}
& R_{n+1, n+2} \cdot C_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot C_n = - (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{B}_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot \bar{B}_n) \cdot \frac{\sin \Phi}{\Phi} - \\
& - \frac{1}{\Phi} \int_{-\Phi}^0 (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{\eta}_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot \bar{\eta}_n) d\varphi \quad (44)
\end{aligned}$$

bilden.

Setzt man die Beziehungen (43) und (44) in die Gl. (41) ein, benutzt wieder den Ausdruck für $Q_{n, n+1}$ und führt die analogen Umformungen wie für Gl. (32) durch, so ergeben sich, da der Beiwert von

$$(R_{n+1, n+2} \cdot \bar{B}_{n+1} - R_{n-1, n} \cdot \bar{B}_n)$$

gleich Null wird, die endgültigen Bestimmungsgleichungen zu

$$\begin{aligned}
B_{n,n+1} \cdot \sin \Phi \left(\frac{\sin \Phi}{\Phi} - \cos \Phi \right) &= \int_{-\Phi}^0 (\varphi + \Phi) \left(\frac{R_{n+1,n+2}^2}{h_{n+1,n+2}} \cdot \bar{p}_{n+1,n+2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{R_{n-1,n}^2}{h_{n-1,n}} \cdot \bar{p}_{n-1,n} \right) d\varphi + \frac{\sin \Phi}{\Phi} \cdot \int_{-\Phi}^0 \varphi \cdot \frac{0}{\eta_{n,n+1}} \cdot d\varphi + \\
&\quad + R_{n+1,n+2} \cdot \int_{-\Phi}^0 \bar{p}_{n+1,n} \cdot \sin \varphi d\varphi + R_{n-1,n} \cdot \int_{-\Phi}^0 \bar{p}_{n,n+1} \cdot \sin \varphi d\varphi + \\
&\quad + (\Phi - 2 \sin \Phi) \cdot \left(\frac{R_{n+1,n+2}}{h_{n+1,n+2}} \cdot \frac{0}{Q_{n+1,n+2}} - \frac{R_{n-1,n}}{h_{n-1,n}} \cdot \frac{0}{Q_{n-1,n}} \right), \quad (45)
\end{aligned}$$

wobei die sich durch partielle Integration von $\frac{\sin \Phi}{\Phi} \cdot \int_{-\Phi}^0 \frac{0}{\eta} \cdot d\varphi$ ergebende Relation

$$\frac{\sin \Phi}{\Phi} \left[\varphi \cdot \frac{0}{\eta_{n,n+1}} - \int_{-\Phi}^0 \varphi \cdot \frac{0}{\eta'_{n,n+1}} \cdot d\varphi \right] = \sin \Phi \cdot \frac{0}{\eta_{n,n+1}} (-\Phi) - \frac{\sin \Phi}{\Phi} \int_{-\Phi}^0 \varphi \cdot \frac{0}{\eta'_{n,n+1}} \cdot d\varphi$$

benutzt wurde. Hierbei gilt

$$\frac{0}{Q_{n-1,n}} = - \frac{R_{n-1,n}}{\sin \Phi} \int_{-\Phi}^0 (\sin \Phi + \sin \varphi) \bar{p}_{n-1,n} d\varphi \quad (46 a)$$

und

$$\frac{0}{Q_{n+1,n+2}} = - \frac{R_{n+1,n+2}}{\sin \Phi} \int_{-\Phi}^0 (\sin \Phi + \sin \varphi) \bar{p}_{n+1,n+2} d\varphi. \quad (46 b)$$

Ist die halbseitige Belastung symmetrisch zu $\varphi = \frac{-\Phi}{4}$ bzw. $\frac{+\Phi}{4}$, so ist

$$\frac{0}{Q_{n-1,n}} = - \frac{R_{n-1,n}}{2} \int_{-\Phi}^0 \bar{p}_{n-1,n} d\varphi \quad (47 a)$$

und

$$\frac{0}{Q_{n+1,n+2}} = - \frac{R_{n+1,n+2}}{2} \int_{-\Phi}^0 \bar{p}_{n+1,n+2} d\varphi. \quad (47 b)$$

Die $C_{n,n+1}$ ergeben sich aus den Gl. (43).

4. Näherungsverfahren für schwach gekrümmte Faltwerke

Handelt es sich um ein prismatisches Faltwerk, so verschwindet in Gl. (4) das Glied mit $Q_{n,n+1}$ ganz. Ist das Faltwerk hingegen schwach gekrümmt, so ist in Gl. (4) der Einfluß der Querkräfte $Q_{n,n+1}$ gegenüber den anderen Wirkungsgrößen klein und man kann ihn in Gl. (4) vernachlässigen. Dadurch vereinfacht sich die Rechnung bedeutend.

Nimmt man für $Q_{n,n+1}$ den Wert der Gl. (5), so nehmen zunächst die Bedingungengleichungen (16) die Form an

$$\begin{aligned}
 & t'_{n-1} \cdot \frac{R_{n-1,n}}{b_{n-1,n} \cdot h_{n-1,n}} + t'_n \cdot \left[\frac{2 R_{n-1,n}}{b_{n-1,n} \cdot h_{n-1,n}} + \frac{2 R_{n-1,n}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} \right] + \\
 & + t'_{n+1} \cdot \frac{R_{n+1,n+2}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} = - \frac{3 R_{n-1,n}^2}{b_{n-1,n} \cdot h_{n-1,n}^2} \cdot p_{n-1,n} - \frac{3 (R_{n-1,n} + R_{n+1,n+2})}{2 b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}^2} \cdot \\
 & \cdot (R_{n-1,n} \cdot p_{n,n+1} + R_{n+1,n+2} \cdot p_{n+1,n}) + \frac{3}{2 \cdot b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}^2} \cdot \\
 & \cdot \frac{R_{n-1,n} + R_{n+1,n+2}}{2} \cdot \left(N_{n-1,n} + N_{n+1,n+2} + 2 N_{n,n+1} - \frac{2 M_{n-1,n}}{h_{n-1,n}} + \right. \\
 & \left. + \frac{2 M_{n+1,n+2}}{h_{n+1,n+2}} \right). \quad (48a)
 \end{aligned}$$

Die dem Gleichungssystem (17) entsprechenden Bedingungen lauten

$$\begin{aligned}
 & t'_n \cdot \frac{R_{n-1,n}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} + t'_{n+1} \cdot \left[\frac{2 R_{n+1,n+2}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} + \frac{2 R_{n+1,n+2}}{b_{n+1,n+2} \cdot h_{n+1,n+2}} \right] + \\
 & + t'_{n+2} \cdot \frac{R_{n+1,n+2}}{b_{n+1,n+2} \cdot h_{n+1,n+2}} = - \frac{3 R_{n+1,n+2}^2}{b_{n+1,n+2} \cdot h_{n+1,n+2}^2} \cdot p_{n+1,n+2} - \\
 & - \frac{3 (R_{n-1,n} + R_{n+1,n+2})}{2 b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}^2} \cdot (R_{n-1,n} \cdot p_{n,n+1} + R_{n+1,n+2} \cdot p_{n+1,n}) \\
 & + \frac{3}{2 b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}^2} \cdot \frac{R_{n-1,n} + R_{n+1,n+2}}{2} \cdot \\
 & \cdot \left(N_{n-1,n} + N_{n+1,n+2} + 2 N_{n,n+1} - \frac{2 M_{n-1,n}}{h_{n-1,n}} + \frac{2 M_{n+1,n+2}}{h_{n+1,n+2}} \right). \quad (48b)
 \end{aligned}$$

Differentiert man die beiden Gleichungssysteme je zweimal nach φ , setzt die Gleichungen (1), (3), (4), (7), (9) und nachher auch (2) und (8) ein, so ergeben sich die beiden folgenden Systeme von simultanen, linearen Differentialgleichungen 3. Ordnung

$$\begin{aligned}
 & t'''_{n-1} \cdot \frac{R_{n-1,n}}{b_{n-1,n} \cdot h_{n-1,n}} + t'''_n \cdot \left[\frac{2 R_{n-1,n}}{b_{n-1,n} \cdot h_{n-1,n}} + \frac{2 R_{n-1,n}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} \right] + \\
 & + t'''_{n+1} \cdot \frac{R_{n+1,n+2}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} = + \frac{3 (R_{n-1,n} + R_{n+1,n+2})}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}^2} \cdot \left(p_{n-1,n} \cdot \frac{R_{n-1,n}^2}{h_{n-1,n}} - \right. \\
 & \left. - p_{n+1,n+2} \cdot \frac{R_{n+1,n+2}^2}{h_{n+1,n+2}} \right) - \frac{3 R_{n-1,n}^2}{b_{n-1,n} \cdot h_{n-1,n}^2} \cdot p''_{n-1,n} - \frac{3 (R_{n-1,n} + R_{n+1,n+2})}{2 b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}^2} \cdot \\
 & \cdot (R_{n-1,n} \cdot p''_{n,n+1} + R_{n+1,n+2} \cdot p''_{n+1,n}) \quad (49a)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & t'''_n \cdot \frac{R_{n-1,n}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} + t'''_{n+1} \cdot \left[\frac{2 R_{n+1,n+2}}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}} + \frac{2 R_{n+1,n+2}}{b_{n+1,n+2} \cdot h_{n+1,n+2}} \right] + \\
 & + t'''_{n+2} \cdot \frac{R_{n+1,n+2}}{b_{n+1,n+2} \cdot h_{n+1,n+2}} = + \frac{3 (R_{n-1,n} + R_{n+1,n+2})}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}^2} \cdot \left(p_{n-1,n} \cdot \frac{R_{n-1,n}^2}{h_{n-1,n}} - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -p_{n+1, n+2} \cdot \frac{R_{n+1, n+2}^2}{h_{n+1, n+2}} \Big) - \frac{3 R_{n+1, n+2}^2}{b_{n+1, n+2} \cdot h_{n+1, n+2}^2} \cdot p''_{n+1, n+2} - \\
 & - \frac{3(R_{n-1, n} + R_{n+1, n+2})}{2 b_{n, n+1} \cdot h_{n, n+1}^2} \cdot (R_{n-1, n} \cdot p''_{n, n+1} + R_{n+1, n+2} \cdot p''_{n+1, n+2}),
 \end{aligned} \quad (49b)$$

die man leicht nach t_n''' auflösen kann. Wir erhalten dann daraus

$$\begin{aligned}
 t_n = & \sum_1^{\frac{m}{2}} \left[(s_{n, 2u} + s_{n, 2v+1}) \cdot \iiint p_{2v, 2v+1} \cdot (d\varphi)^3 \right] + \\
 & + \sum_1^{\frac{m}{2}} \left[(u_{n, 2v} + u_{n, 2v+1}) \cdot \int p_{2v, 2v+1} \cdot d\varphi \right] + \\
 & + \sum_1^{\frac{m}{2}} \left[(v_{n, 2v} + v_{n, 2v+1}) \cdot \int p_{2v-1, 2v} \cdot d\varphi \right] + \\
 & + \sum_1^{\frac{m}{2}} \left[(w_{n, 2v} + w_{n, 2v+1}) \cdot \int p_{2v, 2v-1} \cdot d\varphi \right] + \\
 & + A_n \frac{\varphi^2}{2} + B_n \varphi + C_n = T_n + A_n \frac{\varphi^2}{2} + B_n \cdot \varphi + C_n.
 \end{aligned} \quad (50)$$

Um die darin auftretenden Integrationskonstanten A_n , B_n und C_n bestimmen zu können, ist es zunächst notwendig, die in den Gl. (48a) und (48b) vorkommende Form

$$\Delta_{n, n+1} = N_{n-1, n} + N_{n+1, n+2} + 2 N_{n, n+1} - 2 \frac{M_{n-1, n}}{h_{n-1, n}} + 2 \frac{M_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} \quad (51)$$

durch die t_n und die Belastungen auszudrücken. Es wird, da für $\varphi = \pm \Phi$ alle M und N Null werden,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\Phi}^{\Phi} \Delta'_{n, n+1} \cdot d\varphi = \Delta_{n, n+1} = \\
 & - 2 \frac{R_{n-1, n}}{h_{n-1, n}} \cdot \int_{-\Phi}^{\Phi} Q_{n-1, n} \cdot d\varphi + 2 \frac{R_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} \int_{-\Phi}^{\Phi} Q_{n+1, n+2} \cdot d\varphi.
 \end{aligned} \quad (52)$$

In Hinkunft schreiben wir das n -fache Integral

$$\int_{(n)} p_{2v, 2v+1} \cdot (d\varphi)^n = f_{n, 2v, 2v+1}. \quad (I)$$

Benutzt man die Gl. (25a) und (25b), so folgt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{n, n+1} &= \frac{R_{n-1, n}^2}{h_{n-1, n}} \int_{-\varphi}^{\varphi} d\varphi \left[\int_0^{\varphi} p_{n-1, n} \cdot d\varphi - \frac{Q_{n-1, n}}{R_{n-1, n}} \right] - \frac{2 R_{n+1, n+2}^2}{h_{n+1, n+2}} \int_{-\varphi}^{\varphi} d\varphi \cdot \\
 &\cdot \left[\int_0^{\varphi} p_{n+1, n+2} \cdot d\varphi - \frac{Q_{n+1, n+2}}{R_{n+1, n+2}} \right] = \frac{2 R_{n-1, n}^2}{h_{n-1, n}} \left[f(\varphi) - \left(f(\varphi) + \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{Q_{n-1, n}}{R_{n-1, n}} \right) \varphi - f(-\Phi) - \left(f(0) + \frac{Q_{n-1, n}}{R_{n-1, n}} \right) \Phi \left. \right] - \frac{2 R_{n+1, n+2}^2}{h_{n+1, n+2}} \cdot \\
 &\cdot \left[f(\varphi) - \left(f(0) + \frac{Q_{n+1, n+2}}{R_{n+1, n+2}} \right) \varphi - f(-\Phi) - \right. \\
 &\left. - \left(f(0) + \frac{Q_{n+1, n+2}}{R_{n+1, n+2}} \right) \varphi \right]. \quad (53)
 \end{aligned}$$

Wir zerlegen nun, so wie im vorigen Abschnitt, die allgemeine Belastung in einem zu $\varphi = 0$ symmetrischen und in einem hierzu antimetrischen Teil, so daß

$$p_{2\nu, 2\nu+1} = \bar{p}_{2\nu, \nu+1} + \bar{p}_{2\nu, \nu+1} \quad (54)$$

wird.

Aus Symmetriegründen sind bei den symmetrischen Belastungen die $Q_{n-1, n}$ und $Q_{n+1, n+2}$ gleich Null. Außerdem ist hierfür

$$\bar{f}(0) = \bar{f}(0) = 0, \\ 1; n-1, n \quad 1; n+1, n+2$$

so daß sich aus Gl. (53) die Form

$$\begin{aligned}
 \bar{\Delta}_{n, n+1} &\text{ zu} \\
 \bar{\Delta}_{n, n+1} &= \frac{2 R_{n-1, n}^2}{h_{n-1, n}} \left[\bar{f}(0) - \bar{f}(-\Phi) \right] - \frac{2 R_{n+1, n+2}^2}{h_{n+1, n+2}} \cdot \\
 &\cdot \left[\bar{f}(\varphi) - \bar{f}(-\Phi) \right] \quad (55)
 \end{aligned}$$

ergibt.

Legt man durch das Auflager $\varphi = -\Phi$ der räumlichen Scheibe $n-1, n$ eine Achse parallel zu $\varphi = 0$ und stellt unter Bedachtnahme auf $M_{-\varphi} = M_0 = 0$ um die letztere die Momentengleichung auf, so erhalten wir für die antimetrische Belastung, wenn man hierbei $\sin \varphi \approx \varphi$ setzt,

$$\begin{aligned}
 \frac{Q_{n-1, n}}{R_{n-1, n}} &= -\frac{1}{\Phi} \int_{-\Phi}^0 \bar{p}_{n-1, n} \cdot (\Phi + \varphi) d\varphi = \\
 &= -\int_{-\Phi}^0 \bar{p}_{n-1, n} \cdot d\varphi - \frac{1}{\Phi} \int_{-\Phi}^0 \varphi \cdot \bar{p}_{n-1, n} \cdot d\varphi. \quad (56)
 \end{aligned}$$

Setzt man

$$\bar{p}_{n-1, n} \cdot d\varphi = d\bar{f}(\varphi) \\ 1; n-1, n$$

und formt das zweite Glied von (56) durch partielle Integration um, so wird

$$\begin{aligned} \frac{Q_{n-1,n}}{R_{n-1,n}} &= -\frac{\bar{f}(0)}{1;n-1,n} + \frac{\bar{f}(-\Phi)}{1;n-1,n} - \frac{1}{\Phi} \cdot \left[\varphi \cdot \frac{\bar{f}(\varphi)}{1;n-1,n} - \frac{\bar{f}(\varphi)}{2;n-1,n} \right]_0^\Phi = \\ &= -\frac{\bar{f}(0)}{1;n-1,n} + \frac{1}{\Phi} \frac{\bar{f}(0)}{1;n-1,n} - \frac{1}{\Phi} \frac{\bar{f}(-\Phi)}{2;n-1,n}. \end{aligned} \quad (57a)$$

Eine entsprechende Gleichung (57b) ergibt sich für die räumliche Scheibe $n+1, n+2$. Setzt man dann Gl. (57a) und (57b) in Gl. (53) ein und berücksichtigt, daß für die antisymmetrische Belastung

$$\frac{\bar{f}(0)}{2;n-1,n} - \frac{\bar{f}(0)}{2;n+1,n+2} = 0$$

wird, so erhalten wir die Form $\bar{A}_{n,n+1}$ zu

$$\begin{aligned} \bar{A}_{n,n+1} &= \frac{2R_{n-1,n}^2}{h_{n-1,n}} \left[\frac{\bar{f}(\varphi)}{2;n-1,n} - \frac{\varphi}{\Phi} \frac{\bar{f}(-\Phi)}{2;n-1,n} \right] - \\ &- \frac{2R_{n+1,n+2}^2}{h_{n+1,n+2}} \left[\frac{\bar{f}(\varphi)}{2;n+1,n+2} - \frac{\varphi}{\Phi} \frac{\bar{f}(-\Phi)}{2;n+1,n+2} \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

Die allgemeine Lösung (50) muß nun die Gleichungssysteme (48a) und (48b) befriedigen, da letztere die im Abschnitt 2a festgelegte Spannungsgleichheit zum Ausdruck bringen.

Handelt es sich um eine symmetrische Belastung, so wird in Gl. (50) $A_n = C_n = 0$ und die p sind durch die $\bar{p}$ zu ersetzen (siehe Gl. (54)). Führt man unter Berücksichtigung der Gl. (55) sowie der Schreibweise I, die so erhaltenen $\bar{t}_n$ in das System (48a) ein, so wird

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^{+1} a_{n-\mu} \cdot \underbrace{\left[\sum_{\nu=1}^{\frac{m}{2}} (s_{n-\mu; 2\nu} + s_{n-\mu; 2\nu+1}) \frac{\bar{f}(\varphi)}{2; 2\nu, 2\nu+1} \right]}_{\text{Glied 1}} \\ & + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{\frac{m}{2}} (u_{n-\mu; 2\nu} + u_{n-\mu; 2\nu+1}) \frac{\bar{p}_{2\nu-1, 2\nu}}{2; 2\nu-1, 2\nu}}_{\text{Glied 2}} \\ & + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{\frac{m}{2}} (w_{n-\mu; 2\nu} + w_{n-\mu; 2\nu+1} + v_{n-\mu; 2\nu} + v_{n-\mu; 2\nu-1}) \frac{\bar{p}_{2\nu, 2\nu+1} + B_{n-\mu}}{2; 2\nu, 2\nu+1}}_{\text{Glied 3}} = \\ & = 3 \frac{(R_{n-1,n} + R_{n+1,n+2})}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}^2} \underbrace{\left[\frac{R_{n-1,n}^2}{h_{n-1,n}} \cdot \frac{\bar{f}(\varphi)}{2;n-1,n} - \frac{R_{n+1,n+2}^2}{h_{n+1,n+2}} \cdot \frac{\bar{f}(\varphi)}{2;n+1,n+2} \right]}_{\text{Glied I}} - \\ & - 3 \frac{(R_{n-1,n} + R_{n+1,n+2})}{b_{n,n+1} \cdot h_{n,n+1}^2} \underbrace{\left[\frac{R_{n-1,n}^2}{h_{n-1,n}} \cdot \frac{\bar{f}(-\Phi)}{2;n-1,n} - \frac{R_{n+1,n+2}^2}{h_{n+1,n+2}} \cdot \frac{\bar{f}(-\Phi)}{2;n+1,n+2} \right]}_{\text{Glied II}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{3 R_{n-1, n}^2}{b_{n-1, n} \cdot h_{n-1, n}^2} \bar{p}_{n-1, n} - \\
 & \quad \text{Glied II} \\
 & - \frac{3 (R_{n-1, n} + R_{n+1, n+2})}{2 \cdot b_{n, n+1} \cdot h_{n, n+1}^2} (R_{n-1, n} \cdot \bar{p}_{n, n+1} + R_{n+1, n+2} \cdot \bar{p}_{n+1, n}). \\
 & \quad \text{Glied III}
 \end{aligned} \tag{59a}$$

Ein entsprechendes System (59b), welches wir aber nicht gesondert anschreiben, folgt aus (48b). Da in den Gleichungen (48a, b) und (49a, b) die Beiwerte der linken Seite ganz und die der rechten Seiten zum Teil übereinstimmen, da ferner der erste Teil von (50) von den ersten rechtsstehenden Gliedern von (48a, b) stammt und beim Einsetzen von (55) in (48a, b) die Beiwerte der $\bar{f}_2(\varphi)$ gleich den ersten, rechtsseitigen Gliedern von (49a, b) werden, heben sich in (59a) die Glieder 1, 2, 3 gegen I, II, III auf. Das analoge gilt für Gl. (59b), so daß wir für die Bestimmung der B_n die Systeme

$$\begin{aligned}
 & B_{n-1} \frac{R_{n-1, n}}{b_{n-1, n} \cdot h_{n-1, n}} + B_n \left[\frac{2 R_{n-1, n}}{b_{n-1, n} \cdot h_{n-1, n}} + \frac{2 R_{n-1, n}}{b_{n+1, n+2} \cdot h_{n+1, n+2}} \right] + \\
 & + B_{n+1} \cdot \frac{R_{n+1, n+2}}{b_{n+1, n+2} \cdot h_{n+1, n+2}} = - \frac{3 (R_{n, n-1} + R_{n+1, n+2})}{b_{n, n+1} \cdot h_{n, n+1}^2} \left[\frac{R_{n-1, n}^2}{h_{n-1, n}} \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \bar{f}(-\Phi) - \frac{R_{n+1, n+2}^2}{h_{n+1, n+2}} \bar{f}(-\Phi) \right]_{2; n-1, n} \quad \quad \quad (60a)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & B_n \frac{2 R_{n-1, n}}{b_{n, n+1} \cdot h_{n, n+1}} + B_{n+1} \left[\frac{2 R_{n+1, n+2}}{b_{n, n+1} \cdot h_{n, n+1}} + \frac{2 R_{n+1, n+2}}{b_{n+1, n+2} \cdot h_{n+1, n+2}} \right] + B_{n+2} \cdot \\
 & \cdot \frac{R_{n+1, n+2}}{b_{n+1, n+2} \cdot h_{n+1, n+2}} = - \frac{3 (R_{n-1, n} + R_{n+1, n+2})}{b_{n, n+1} \cdot h_{n, n+1}^2} \left[\frac{R_{n-1, n}^2}{h_{n-1, n}} \cdot \bar{f}(-\Phi) - \right. \\
 & \left. - \frac{R_{n+1, n+2}^2}{h_{n+1, n+2}} \cdot \bar{f}(-\Phi) \right]_{2; n+1, n+2} \quad \quad \quad (60b)
 \end{aligned}$$

erhalten, deren Beiwerte mit denjenigen von Gl. (49a, b) bis auf das Vorzeichen der rechten Seiten übereinstimmen.

Handelt es sich hingegen um eine antimetrische Belastung, so wird in der allgemeinen Lösung (50) nur $B_n = 0$ und die p sind durch $\bar{p}$ zu ersetzen (siehe Gl. 54). Führt man unter Berücksichtigung der Gl. (58) und der Schreibweise (I) die so erhaltenen $\bar{t}_n$ in die Systeme (48a und 48b) ein, berücksichtigt, daß beim Übergang von $\bar{t}_n$ nach $\bar{t}_n'$ die C_n wegfallen und nimmt die den Gl. (59a, b) analogen Kürzungen vor, so ergeben sich die den Gl. (60a, b) entsprechenden Gl. (61a, b). Führt man die so angedeutete Rechnung wirklich durch, so erhält man die Gl. (61a, b) aus den Gl. (60a, b), indem man für B_n den Wert $\varphi \cdot A_n$ und für

$$\bar{f}_{2; n-1, n}(-\Phi) \quad \text{bzw.} \quad \bar{f}_{2; n+1, n+2}(-\Phi)$$

die Werte

$$\frac{\varphi}{\Phi} \bar{f}_{2; n-1, n}(-\Phi) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\varphi}{\Phi} \bar{f}_{2; n+1, n+2}(-\Phi)$$

setzt. Kürzt man die Gl. (61a) und (61b) durch φ , so ergeben sich endlich die Bestimmungsgleichungen für die A_n .

Wir haben somit ein sehr einfaches und elegantes Verfahren der Konstantenbestimmung gefunden, das sich folgendermaßen gestaltet:

1. Man läßt zunächst in der bereits errechneten algebraischen Lösung der Gl. (49a) und (49b) die Glieder mit den zweiten Ableitungen der p weg und beachtet die Gleichheit der Beiwerte von (49) und (60) bzw. (61)³⁾.

a) Setzt man nun in dem übrig bleibenden Teil dieser Lösung für

$$p_{n-1, n} = -\frac{\bar{f}(-\Phi)}{2; n-1, n}$$

und für

$$p_{n+1, n+2} = -\frac{\bar{f}(-\Phi)}{2; n+1, n+2}$$

so ergeben sich die zu den symmetrischen Belastungen p gehörigen Konstanten B_n .

b) Setzt man hingegen in dieser übrig bleibenden Lösung für

$$p_{n-1, n} = -\frac{1}{\Phi} \frac{\bar{f}(-\Phi)}{2; n-1, n}$$

und für

$$p_{n+1, n+2} = -\frac{1}{\Phi} \frac{\bar{f}(-\Phi)}{2; n+1, n+2},$$

so ergeben sich die zu den antisymmetrischen Belastungen $\bar{p}$ gehörigen Konstanten A_n .

2. Daraus folgen dann mit Hilfe der Momentenbedingungen (23)

$$\int_{-\Phi}^0 \bar{t}_n \cdot d\varphi = \int_{-\Phi}^0 T_n d\varphi + A_n \frac{\Phi^3}{6} + C_n \cdot \Phi = 0$$

die noch restlichen Konstanten zu

$$C_n = -\frac{1}{\Phi} \left[\int_{-\Phi}^0 T_n d\varphi + A_n \frac{\Phi^2}{6} \right].$$

Wir wollen noch untersuchen, mit welcher Genauigkeit die Gleichgewichtsbedingungen der ebenen Scheiben bei diesem Näherungsverfahren erfüllt sind, da man daraus auf die Weite des Anwendungsgebietes schließen kann.

Für eine symmetrische Belastung ist auch hier nur das Gleichgewicht gegen Verschieben parallel $\varphi = 0$ zu untersuchen. Mit Hilfe der Gl. (51) kann man die entsprechende Resultierende der Abtriebskräfte darstellen durch

$$\begin{aligned} \uparrow &= \frac{1}{2} \int_{-\Phi}^0 (\bar{A}_{n, n+1} - 2 N_{n, n+1}) \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\Phi}^0 \bar{A}_{n, n+1} \cdot \cos \varphi d\varphi + \int_{-\Phi}^0 N'_{n, n+1} \sin \varphi \cdot d\varphi, \end{aligned}$$

wobei der zweite Summand durch partielle Integration entstanden ist. Aus Gl. (5) folgt durch bestimmte Integration die Komponente des Auflagerdruckes zu

³⁾ bei Gl. (50) entspricht dies dem Fortfall des 2., 3. und 4. Gliedes.

$$\begin{aligned} \uparrow &= \cos \Phi \cdot Q_{n, n+1}(-\Phi) = -\frac{1}{2} \cos \Phi \int_{-\Phi}^0 \bar{\Delta}_{n, n+1} d\varphi + \\ &+ \cos \Phi \int_{-\Phi}^0 (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{p}_{n+1, n} + R_{n-1, n} \cdot \bar{p}_{n, n+1}) d\varphi. \end{aligned}$$

Bedenkt man, daß der Anteil der Scheibenbelastungen $\bar{p}_{n, n+1}$ und $\bar{p}_{n+1, n}$

$$\uparrow = - \int_{-\Phi}^0 (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{p}_{n+1, n+2} + R_{n-1, n} \cdot \bar{p}_{n, n+1}) \cos \varphi d\varphi$$

und derjenige der Schubkräfte $\bar{t}_n$ und $\bar{t}_{n+1}$

$$\uparrow = - \int_{-\Phi}^0 \frac{\bar{t}_{n+1} \cdot R_{n+1, n+2} - \bar{t}_n \cdot R_{n-1, n}}{N'_{n, n+1}} \sin \varphi d\varphi$$

beträgt, so ergibt die algebraische Zusammenziehung dieser vier Komponenten den absoluten Fehler ε , um welchen die obige Gleichgewichtsbedingung von Null abweicht. Benutzt man für $\Delta_{n, n+1}$ die Gl. (55), so erhalten wir für symmetrische Belastungen

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{n, n+1} &= - \int_{-\Phi}^0 \left\{ \frac{R_{n+1, n+2}^2}{h_{n+1, n+2}} \left[\frac{\bar{f}(\varphi)}{2; n+1, n+2} - \frac{\bar{f}(-\Phi)}{2; n-1, n+2} \right] - \frac{R_{n-1, n}^2}{h_{n-1, n}} \left[\frac{\bar{f}(\varphi)}{2; n-1, n} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\bar{f}(-\Phi)}{2; n-1, n} \right] - (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{p}_{n+1, n} + R_{n-1, n} \cdot \bar{p}_{n, n+1}) \right\} (\cos \varphi - \cos \Phi) d\varphi. \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

Eine analoge Betrachtung für die antimetrische Belastung führt auf den dazugehörigen Fehler

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{n, n+1} &= - \int_{-\Phi}^0 \left\{ \frac{R_{n+1, n+2}^2}{h_{n+1, n+2}} \left[\frac{\bar{f}(\varphi)}{2; n+1, n+2} - \frac{\bar{f}(-\Phi)}{2; n+1, n+2} \right] - \frac{R_{n-1, n}^2}{h_{n-1, n}} \left[\frac{\bar{f}(\varphi)}{2; n-1, n} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\varphi}{\Phi} \frac{\bar{f}(-\Phi)}{2; n-1, n} \right] - (R_{n+1, n+2} \cdot \bar{p}_{n+1, n} + R_{n-1, n} \cdot \bar{p}_{n, n+1}) \right\} (\sin \varphi + \sin \Phi) d\varphi. \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

Die Belastungen haben nun fast immer die Form einer algebraischen Funktion von φ , wobei φ nicht im Nenner vorkommen kann, da sonst für $\varphi = 0$ ein $p = \infty$ entstehen würde, was praktisch nicht möglich ist. Ist diese Form von Haus aus nicht vorhanden, so kann man die p durch eine Potenzreihe

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} \bar{p}_{2\varrho} \cdot \varphi^{2\varrho} + \sum_{\varrho=0}^{\infty} \bar{p}_{2\varrho+1} \cdot \varphi^{2\varrho+1}$$

ausdrücken, wobei das erste Glied den symmetrischen und das zweite Glied den antimetrischen Teil der Belastung darstellt. Für einen Summanden des symmetrischen Teiles ergibt sich bei Unterdrückung kleiner Größen höherer Ordnung

$$\bar{\varepsilon}_{n, n+1}^{(2\varrho)} = \bar{a}_{2\varrho} \cdot \Phi^{2\varrho+3} + \bar{A}_{2\varrho} + \bar{\beta}_{2\varrho} \cdot \Phi^{2\varrho+2} + \bar{B}_{2\varrho}, \quad (\text{III})$$

wobei

$$\bar{A}_{2\varrho} = \left[\bar{p}_{n+1, n+2} \cdot \frac{(R_{n+1, n+2} \cdot \Phi)^2}{h_{n+1, n+2}} - \bar{p}_{n-1, n} \cdot \frac{(R_{n-1, n} \cdot \Phi)^2}{h_{n-1, n}} \right] \quad (\text{I a})$$

und

$$\bar{B}_{2\varrho} = [(R_{n+1, n+2} \cdot \Phi) \bar{p}_{n, n+1} + (R_{n-1, n} \cdot \Phi) \bar{p}_{n+1, n}] \quad (\text{II a})$$

bedeutet. Für den antisymmetrischen Teil folgen die Formeln, indem man die ε , α , β , A , B und p oben zweimal statt einmal überstreicht. Für eine Gleichlast $\bar{p}_0$ wird $\bar{\alpha}_0 = \frac{1}{5}$; $\bar{\beta}_0 = -\frac{1}{3}$ und für eine antisymmetrische Last $\bar{p}_0 \cdot \varphi$ wird $\bar{\alpha}_0 = -\frac{13}{360}$; $\bar{\beta}_0 = \frac{1}{6}$, wobei in den Formeln $\varrho = 0$ gesetzt werden muß.

Wird nun die Krümmung immer kleiner, so wachsen die R und φ fällt, so daß die Produkte ($\varphi \cdot R$), selbst im Extremfall $R \rightarrow \infty$ einem endlichen Wert, nämlich der halben Spannweite $L/2$, zustreben. Da die p in den meisten Fällen gleiches Vorzeichen haben, bestehen die ersten Glieder der Fehlergleichungen I und II im allgemeinen aus Differenzen zweier nicht sehr stark voneinander verschiedenen Zahlen. Beachtet man weiter, daß die Belastungen der waagrechten Falten ebenfalls immer sehr klein sind, so erkennt man, daß bei mäßigen Krümmungen und sonst normalen Verhältnissen die Fehler sehr gering sein werden.

Man kann aber stets in außergewöhnlichen Fällen die Fehlergrößen nach I und II genau ermitteln und diejenigen Krümmungsverhältnisse angeben, bei welchen eine vorher festgesetzte Fehlergröße nicht überschritten wird.

Damit ist dieses Näherungsverfahren wissenschaftlich genügend unterbaut.

5. Gekrümmte Faltwerke mit parallelen Endscheiben

Die bisher wiedergegebenen Verfahren gelten für „sektorförmige“ Faltwerke, bei welchen, wie eingangs beschrieben, die Ebenen der Endscheiben durch die Zentralachse hindurchgehen. Liegen hingegen die beiden Auflagerscheiben parallel zur Symmetrieebene, so gelten zunächst die Grundgleichungen (49a) und (49b) nur für das in Bild 1 angedeutete sektorförmige Gebiet, da nur in diesem von jedem Radiusvektor alle Kanten n geschnitten werden. Wir wollen nun den Clapeyron'schen Charakter der Grundgleichungen beachten, das heißt, es dominiert in jeder dieser Gleichungen der mittlere Beiwert gegenüber den beiden anderen. Bei solchen Systemen erhält man für die Unbekannten eine erste Näherung, indem man in jeder Gleichung das Belastungsglied der rechten Seite durch den Beiwert der mittleren Unbekannten dividiert. Die Lösungen t_n der Grundgleichungen hängen also im wesentlichen von den mittleren Beiwerten und weniger von der Anzahl der Gleichungen ab, das heißt, sie gelten mit guter Näherung auch außerhalb des sektorförmigen Gebietes. Wir müssen noch beachten, daß diejenigen Teile, für welche die allgemeine Lösung (50) nicht genau stimmt, in der Nähe der Auflagerscheiben liegen, das heißt, die Fehler pflanzen sich nach dem St. Venant'schen Prinzip bis zur Mitte des Tragwerkes; wo die maximalen Längsspannungen auftreten, praktisch genommen nicht mehr fort. Wir wollen uns also für die Tragwerksmitte mit dieser Näherung zufrieden geben. Für die Schub sicherungen an den Endscheiben ist es jedoch zweckmäßig, und zwar besonders für die der Zentralachse näher gelegenen Scheiben, einen ca. 100/n% igen Zuschlag zu machen, der die Wirtschaftlichkeit des Ganzen wenig beeinflußt. Hierbei ist n das Verhältnis der mittleren dominierenden Beiwerte der Grundgleichungen zu deren Randbeiwerten.

Um auch für diese Lagerungsart alle Wirkungsgrößen angeben zu können, benötigen wir auch hier vorher die Größe der Integrationskonstanten. Wir entwickeln in der Folge für deren Bestimmung zwei Verfahren.

Wir betrachten zunächst eine symmetrische Belastung. Faßt man längs des Kantenstückes 12 die Abtriebskräfte $\bar{\alpha}_{n+1, n}$, den Schubfluß $\bar{t}_{n+1}$ und die Belastung $\bar{p}_{n+1, n}$ zusammen und bezeichnet die Vertikalkomponente mit $\bar{V}_{n, n+1}$ und die Horizontalkomponente mit $\bar{H}_{n, n+1}$, so ergeben sich die beiden Projektionsgleichungen

und für

$$\begin{aligned} \bar{V}_{n, n+1} = & R_{n+1, n+2} \cdot \bar{A}_{n+1} \cdot \sin \Phi_n (\cos \Phi_{n+1} - \cos \Phi_n) + \\ & + R_{n+1, n+2} \cdot \sin \Phi_n \cdot \int_{-\Phi_{n+1}}^{-\Phi_n} \bar{\eta}_{n+1} \cdot d\varphi - \frac{R_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} \sin \Phi_n \cdot \int_{-\Phi_{n+1}}^{-\Phi_n} \bar{Q}_{n+1, n+2} \cdot d\varphi - \\ & - R_{n+1, n+2} \int_{-\Phi_{n+1}}^{-\Phi_n} \cos \varphi \cdot \bar{p}_{n+1, n} \cdot d\varphi - \frac{R_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} \int_{-\Phi_{n+1}}^{-\Phi_n} \sin \varphi \cdot \bar{Q}_{n+1, n+2} \cdot d\varphi, \end{aligned} \quad (e)$$

wobei wieder Gl. (31b) gilt. Setzt man diese Werte in die Gl. (a), (b) und (c) ein, so erhalten wir

$$N(-\Phi_n) = X - Y \quad (a')$$

$$\begin{aligned} Q(-\Phi_n) = & -A_{n, n+1} \cdot \sin \Phi_n + \frac{0}{\eta_{n, n+1}} (-\Phi_n) = \bar{\mathfrak{A}}_{n, n+1} \cdot \cos \Phi_n - \\ & - R_{n+1, n+2} \cdot \int_{-\Phi_{n+1}}^{-\Phi_n} \left\{ \frac{Q_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} \cdot \sin(\Phi_n + \varphi) + \bar{p}_{n+1, n} \cdot \cos(\Phi_n + \varphi) \right\} d\varphi \end{aligned} \quad (f)$$

und

$$M(-\Phi_n) = \frac{h_{n, n+1}}{2} \cdot X + R_m \cdot Y, \quad (c')$$

wobei

$$\begin{aligned} X = & \bar{\mathfrak{A}}_{n, n+1} \cdot \sin \Phi_n + \bar{A}_{n+1} \cdot R_{n+1, n+2} (\cos \Phi_{n+1} - \cos \Phi_n) + \\ & + R_{n+1, n+2} \int_{-\Phi_{n+1}}^{-\Phi_n} \bar{\eta}_{n+1} \cdot d\varphi, \end{aligned}$$

und

$$Y = R_{n+1, n+2} \int_{-\Phi_{n+1}}^{-\Phi_n} \left\{ \frac{Q_{n+1, n+2}}{h_{n+1, n+2}} [1 - \cos(\Phi_n + \varphi) + \bar{p}_{n+1, n} \sin(\Phi_n + \varphi)] \right\} d\varphi$$

bedeutet. Bei Bildung der Gl. (f) wurde wieder Gl. (13) benutzt. Hierfür ergibt sich der Auflagerdruck $\bar{\mathfrak{A}}_{n, n+1}$ aus dem rechtsstehenden Integral der Gl. (32), indem man darin für die $\bar{p}_{n-1, n}$ längs des Randes n von $-\Phi_n$ bis 0 und für die $\bar{p}_{n+1, n+2}$ längs des Randes $n+1$ von $-\Phi_{n+1}$ bis 0 integriert zu

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{A}}_{n, n+1} = & + \frac{R_{n+1, n+2}^2}{h_{n+1, n+2}} \int_{-\Phi_n}^0 \bar{p}_{n+1, n+2} \cdot (\cos \varphi - \cos \Phi_n) d\varphi + \\ & + R_{n+1, n+2} \int_{-\Phi_{n+1}}^0 \cos \varphi \cdot \bar{p}_{n+1, n} \cdot d\varphi + \frac{R_{n-1, n}^2}{h_{n-1, n}} \int_{-\Phi_{n+1}}^0 \bar{p}_{n-1, n} (\cos \varphi - \cos \Phi_{n+1}) d\varphi + \\ & + R_{n-1, n} \int_{-\Phi_n}^0 \cos \varphi \cdot \bar{p}_{n, n+1} \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert in die Gl. (f) ein, so ergibt sich für jede waagerechte Scheibe das $\bar{A}_{n, n+1}$, woraus aus der allgemeinen Lösung (20) die A_{n+1} und daraus wieder die $\bar{t}_n$ folgen, so daß wir mittels der Gl. (1), (3), (7), (9), (4), (6) bzw. (a'), (c') die Normalkräfte und Biegemomente der einzelnen Falten berechnen können. Wir sind dann im Besitze sämtlicher Wirkungsgrößen. Damit ist das 1. Verfahren erledigt.

Wenn wir nun mit diesen Ergebnissen die Spannungsgleichheit zweier angrenzender Scheiben z. B. für $\varphi = 0$ überprüfen, so werden wir, da die Verträglichkeitsbedingungen (17) an den Endscheiben nicht genau erfüllt sind, dabei Abweichungen feststellen können. Um die Auswirkungen derselben zu erfassen, stellen wir mit Hilfe der allgemeinen Lösung (20) aus den Gl. (1), (3), (4), (6), (7) und (9) durch bestimmte Integration von $-\bar{\Phi}_n$ bis 0 für jede Scheibe die Normalkräfte und die Biegemomente in Tragwerksmitte als lineare Funktionen der $\bar{A}_n$ dar. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß an der Stelle $\varphi = -\bar{\Phi}_n$ die Normalkräfte und Biegemomente bei jeder waagerechten Scheibe die in Gl. (a') und (c') dargestellten Werte $N(-\bar{\Phi}_n)$ und $M(-\bar{\Phi}_n)$ und bei jeder der lotrechten Träger die Werte Null annehmen müssen. Die Querkräfte der waagerechten Scheiben nehmen mit den vorhin ermittelten Beiwerten $A_{n, n+1}$ die Form

$$Q_{n, n+1} = A_{n, n+1} \sin \varphi + \bar{q}_{n+1}^0$$

an. Drückt man nun die Kantenspannungen in Tragwerksmitte durch die Normalkräfte N und die Biegemomente M aus und setzt sie kantenweise aneinander gleich, so erhalten wir für die Bestimmung der $\bar{A}_n$ ebenso viele 3-gliedrige Gleichungen als unbekannte Konstante $\bar{A}_n$ vorhanden sind. Damit ist auch das 2. Verfahren bekanntgegeben.

Setzt man die $A_{n, n+1}$ der Gl. (f) in die, in den Gl. (20) durch Klammern angedeuteten Ausdrücke für die $\bar{A}_n$ ein, so müssen sich wieder die vorhin durch die Auflösung der 3-gliedrigen Gleichungen erhaltenen Werte der $\bar{A}_n$ ergeben. Die Genauigkeit, mit der diese Übereinstimmung erfolgt, gibt ein Bild über die Genauigkeit, mit welcher die Verträglichkeitsbedingungen des Problems erfüllt sind.

Handelt es sich um eine antisymmetrische Belastung, so führt ein analoger Weg zum Ziele, bei welchem man aber die Momentengleichungen um die Zentralachse zweimal heranziehen muß.

Die Rechnung vereinfacht sich bedeutend, wenn man näherungsweise

$$N(-\bar{\Phi}_n) = \bar{N}_{n, n+1} \cdot \sin \bar{\Phi}_n$$

$$Q(-\bar{\Phi}_n) = \bar{Q}_{n, n+1} \cdot \cos \bar{\Phi}_n$$

$$M(-\bar{\Phi}_n) = \bar{M}_{n, n+1} \cdot \frac{h_{n, n+1}}{2} \sin \bar{\Phi}_n$$

setzt.

Bestimmt man bei flachgekrümmten Tragwerken die Normalkräfte und Biegemomente im vorhergehenden Sinne als lineare Funktionen der $\bar{A}_n$, so kann man bei den dabei auftretenden bestimmten Integrationen auch annehmen, daß die obigen beiden Wirkungsgrößen an die Endscheiben Null sind. Diese weitere Vereinfachung kann man immer dann mit genügender Genauigkeit anwenden, wenn es sich um Tragwerke des Abschnittes 4 handelt (siehe Abschnitt 9).

Da die Grundgleichungen an den Endscheiben nicht mehr genau richtig sind, handelt es sich in allen Fällen um Näherungen, deren Genauigkeitsgrad man jedoch jederzeit durch Gegenüberstellung beider Verfahren beurteilen kann.

6. Betrachtungen über die Steifknotigkeit

Die im Anfange erwähnte scharnierartige Verbindung längs der Kanten wird selbstverständlich konstruktiv nicht besonders verwirklicht, sondern man verbindet die einzelnen Tragwerksglieder miteinander starr. Dieses Abgehen von der eingangs festgelegten theo-

retischen Voraussetzung hat aber auf die t_n und somit auch auf die M , N und Q praktisch keinen Einfluß, wenn die Dicken der Falten gegenüber deren anderen Abmessungen klein sind, was konstruktiv immer leicht erreicht werden kann. Durch diese Biegungskontinuität längs der Kanten ist aber die, bei der gelenkigen Ausbildungsart mögliche, statisch bestimmte Ermittlung der Scheibenbelastungen p nicht mehr durchführbar. Man ermittelt dann letztere zunächst als Auflagerdrücke eines Durchlaufträgers, der in den Kanten n unnachgiebig gelagert ist. Berechnet man nun mit den so ermittelten p das gelenkige Faltwerk, so weichen die so errechneten t_n , M , N und Q von den genauen, zum steifknotigen Tragwerk gehörigen gleichnamigen Werten nur sehr wenig ab. Die Abweichungen von den exakten Werten, der eingangs erwähnten Biegemomente mit zu den Kanten tangentiellen Drehachsen und der dazugehörigen Querkräfte, treten dann nur

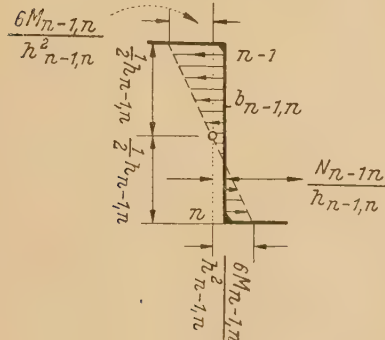


Bild 6

mehr als „Nebenspannungen“ in Erscheinung, die man ähnlich wie bei Fachwerken nicht zu berücksichtigen braucht. Während bei einem prismatischen Faltwerk der vorhin erwähnte Durchlaufträger eine konstante Breite aufweist, hat bei einem gekrümmten Faltwerk dieser eine keilförmige Form, für welche in der Folge die für die Aufstellung der zugehörigen Dreimomenten-Gleichungen nötigen Enddrehwinkel in Form von rasch konvergierenden Potenzreihen angegeben werden.

Durch die Abtriebskräfte werden die räumlichen Scheiben, das sind die lotrechten Glieder des keilförmigen Durchlaufträgers, zusätzlich auf Biegung beansprucht. Die Belastung eines solchen Feldes ist aus Bild 6 ersichtlich. Um die Wirkungen je

7. Der keilförmige Durchlaufträger

Im Anschluß an den vorhergehenden Abschnitt geben wir die Reihen für die Drehwinkel ohne deren Herleitung an. Es bedeutet (siehe Bild 7)

$$k_n = \frac{w}{R_n}; \quad \xi = \frac{x}{w}.$$

$$\vartheta_{n,n} = \frac{24}{b^3} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{k_n^{q+1}}{(q+1)(q+2)(q+3)}$$

$$\vartheta_{n+1,n+1} = \frac{12}{b^3} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{k_n^{q+1}}{q+3}$$

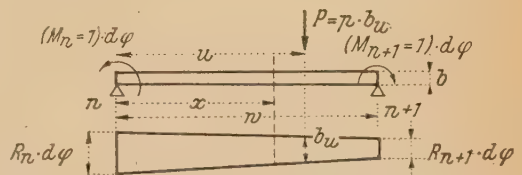


Bild 7

$$\vartheta_{n,n+1} = \vartheta_{n+1,n} = \frac{12}{b^3} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{k_n^{q+1}}{(q+2)(q+3)}$$

Für die Belastungsglieder (Einflußwerte).

$$\eta = \frac{u}{w}; \quad p \dots \text{t/m}$$

$$\vartheta_{n,p} = \frac{12 w^2 p}{b^3} \left\{ \frac{\eta}{6} (2 - 3\eta + \eta^2 + 2) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\eta k_n^q}{(q+1)(q+2)} \left[\frac{1 - \eta^{q+2}}{q+3} - \frac{\eta(1 - \eta^q)}{q} \right] \right\}$$

$$\vartheta_{n+1,p} = \frac{12 w^2 p}{b^3} \left\{ \frac{\eta}{6} (1 - \eta^2) + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\eta k_n^q}{q+2} \left(\frac{1}{q+3} - \frac{\eta}{q+1} + \frac{2\eta^{q+2}}{(q+1)(q+3)} \right) \right\}.$$

Daraus ergibt sich durch Integration über η für die Vollast ω t/m²

$$\vartheta_{n,p} \text{ voll} = \frac{12 w^3 \omega}{b^3} \left\{ \frac{1}{24} + \frac{2}{6} \sum_1^{\infty} k_n^2 \frac{\varrho - 2}{(\varrho + 1)(\varrho + 2)(\varrho + 3)(\varrho + 4)} \right\}$$

$$\vartheta_{n+1,p} \text{ voll} = \frac{12 w^3 \omega}{b^3} \left\{ \frac{1}{24} + \frac{1}{6} \sum_1^{\infty} k_n^2 \frac{\varrho}{(\varrho + 2)(\varrho + 3)(\varrho + 4)} \right\}$$

und für die halbseitige Vollast rechts

$$\vartheta_{n,p/2} \text{ rechts} = \frac{12 w^3 \omega}{b^3} \left\{ \frac{7}{384} + \frac{1}{24} \sum_1^{\infty} \frac{k_n^2}{\varrho(\varrho + 1)(\varrho + 2)(\varrho + 3)(\varrho + 4)} \left[2(2\varrho^2 - 13\varrho + 12) - \frac{3(\varrho + 8)}{2\varrho} \right] \right\}$$

$$\vartheta_{n+1,p/2} \text{ rechts} = \frac{12 w^3 \omega}{b^3} \left\{ \frac{9}{384} - \frac{1}{24} \sum_1^{\infty} \frac{k_n^2}{(\varrho + 1)(\varrho + 2)(\varrho + 3)(\varrho + 4)} \left[-2\varrho(\varrho - 4) + \frac{3}{2\varrho} \right] \right\}.$$

Entwickelt man die letzten Reihen nach fortschreitendem ϱ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vartheta_{n,p} \text{ voll} &= \frac{12 w^3 \omega}{b^3} \left\{ \frac{1}{24} - \frac{k_n}{15 \cdot 24} + 0 + \frac{k_n^3}{105 \cdot 24} + \frac{k_n^4}{105 \cdot 24} + \frac{k_n^5}{126 \cdot 24} + \dots \right\} \\ \vartheta_{n+1,p} \text{ voll} &= \frac{12 w^3 \omega}{b^3} \left\{ \frac{1}{24} + \frac{k_n}{15 \cdot 24} + \frac{k_n^2}{15 \cdot 24} + \frac{k_n^3}{17,5 \cdot 24} + \frac{k_n^4}{21 \cdot 24} + \frac{5k_n^5}{126 \cdot 24} + \dots \right\} \\ \vartheta_{n,p/2} \text{ rechts} &= \frac{12 w^3 \omega}{b^3} \left\{ \frac{7}{384} - \frac{23k_n}{15 \cdot 384} - \frac{78 \cdot k_n^2}{180 \cdot 384} - \frac{177k_n^3}{1260 \cdot 384} - \frac{292k_n^4}{6720 \cdot 384} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{231k_n^5}{30240 \cdot 384} - \dots \right\} \\ \vartheta_{n+1,p/2} \text{ rechts} &= \frac{12 w^3 \omega}{b^3} \left\{ \frac{9}{384} - \frac{7k_n}{15 \cdot 384} - \frac{3k_n^2}{90 \cdot 384} + \frac{45k_n^3}{420 \cdot 384} + \frac{253k_n^4}{1680 \cdot 384} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{957k_n^5}{6048 \cdot 384} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Die halbseitige Vollast links erhalten wir als die Differenz $\vartheta_{p, \text{voll}} - \vartheta_{p/2, \text{rechts}}$.

Für andere Belastungen folgen die dazugehörigen ϑ durch Integration der Einflußwerte.

8. Formänderungen

Um die Verformung eines gekrümmten Faltwerkes angeben zu können, ist es nötig, die der einzelnen Scheiben zu studieren. Die ebenen und die räumlichen Tragwerksglieder sind hierbei getrennt zu behandeln.

a) Die ebenen Scheiben.

So wie in der Theorie der geraden Stäbe, nehmen wir auch hier an, daß ein zur Achse senkrecht stehender Querschnitt auch nach der Verformung auf die verbogene Achse senkrecht steht. Da es sich um einen gekrümmten Träger handelt, benötigt man zur Be-

schreibung der Achsverformungen zwei Parameter. Wir wählen hierzu die tangentielle Verschiebung s und die radiale waagrechte Durchbiegung r . Nach der Verformung wird also das Bogenelement $R_m \cdot d\varphi$ die Lage 34 einnehmen (Bild 8). Aus dem Polygonzug 1342 ergeben sich aus den beiden Projektionsgleichungen, bei Außerachtlassung der kleinen Größen zweiter Ordnung, die Beziehungen

$$r + s' = \Delta \cdot R_m \quad (61)$$

$$r' - s = (1 + \Delta) \cdot \beta \cdot R_m. \quad (62)$$

Da die Dehnung des Bogenelementes $R_m \cdot d\varphi$

$$\Delta \cdot R_m \cdot d\varphi = -\frac{N}{EF} R_m \cdot d\varphi \quad \text{oder} \quad \Delta = -\frac{N}{EF} \quad (63)$$

beträgt, erhalten wir für Gl. (61) und (62)

$$r + s' = -\frac{N}{EF} \cdot R_m \quad (64)$$

und

$$r' - s = \left(1 - \frac{N}{EF}\right) \cdot \beta \cdot R_m. \quad (65)$$

Für nicht allzu scharf gekrümmte Stäbe gilt genügend genau

$$\beta' = \frac{M}{EJ} R_m. \quad (66)$$

Vernachlässigt man die kleine Größe $\frac{N}{EF}$ gegenüber 1, differenziert dann die Gl. (65) einmal nach φ und setzt Gl. (66) ein, so folgt, nach der mit Hilfe von Gl. (64) durchgeführten Elimination von s' , die lineare Differentialgleichung

$$r'' + r = R_m^2 \left(\frac{M}{EJ} - \frac{N}{EF R_m} \right) = R_m^2 \cdot \bar{\Omega}(\varphi), \quad (67)$$

deren allgemeines Integral

$$r = C_A \sin \varphi + C_B \cos \varphi + \left\{ \sum_{n=1}^{n=m} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \bar{\Omega}^{(n-1)}(\varphi) - \sin m \frac{\pi}{2} \left[\cos \varphi \int \bar{\Omega}^{(m)}(\varphi) \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi \int \bar{\Omega}^{(m)}(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right] \right\} R_m^2 \quad (68)$$

lautet ⁴⁾. Aus Gl. (65) ergibt sich, mit Zuhilfenahme des aus Gl. (66) folgenden Verdrehungswinkels

$$\beta = R_m \cdot \int \frac{M}{EJ} d\varphi + C_\beta \quad (69)$$

die tangentielle Verschiebung s zu

$$s = r' - \beta R_m = C_A \cos \varphi - C_B \sin \varphi + C_s - R_m^2 \int \frac{M}{EJ} d\varphi + \left\{ \sum_{n=1}^{n=m} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \bar{\Omega}^{(n)}(\varphi) - \sin \frac{m\pi}{2} \left[\cos \varphi \int \bar{\Omega}^{(m+1)}(\varphi) \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi \int \bar{\Omega}^{(m+1)}(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right] \right\} R_m^2 \quad (70)$$

⁴⁾ Diese Form entsteht durch wiederholte partielle Integration des nach Gl. (11a) gebildeten partiellen Integrals von Gl. (67).

⁵⁾ $\bar{\Omega}^{(m)}$ bedeutet die m^{te} Ableitung von $\bar{\Omega}$ und $\bar{\Omega}^{(0)}$ die Funktion $\bar{\Omega}$ selbst.

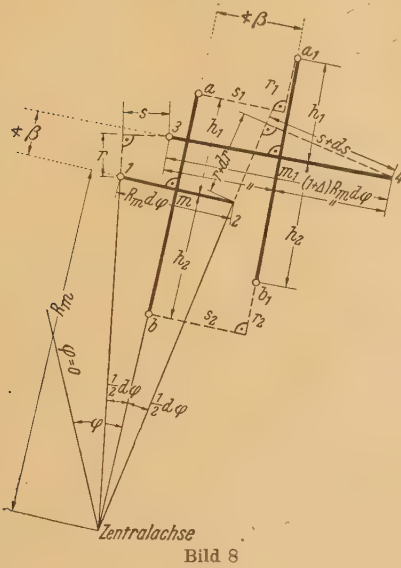


Bild 8

Aus diesen Formänderungen r und s für die Achse ergeben sich diejenigen der Faltenränder aus Bild 8, aus welcher ersichtlich ist, daß der auf $R_m \cdot d\varphi$ senkrecht stehende Querschnitt ab auch nach der Verbiegung senkrecht auf dem verschobenen und gedehnten Bogenelement $(1 + \Delta) \cdot R_m \cdot d\varphi$ steht. Bei Unterdrückung der kleinen Größen zweiter Ordnung lesen wir aus dem Vieleck $m13m_1a_1a$

$$r_1 = r \quad (71)$$

$$s_1 = s - h_1 \cdot \beta \quad (72)$$

und entsprechend

$$r_2 = r \quad (73)$$

$$s_2 = s + h_2 \cdot \beta \quad (74)$$

ab. Hierbei gehört der Index 1 zum erhabenen und der Index 2 zum hohlen Rand.

Die Integrationskonstanten ergeben sich jeweils aus den vorliegenden Auflagerbedingungen,

b) Die räumlichen Scheiben.

Da die einzelnen Scheiben längs der Kanten zusammenhängen, sind die waagrechten Verschiebungen der Ränder der räumlichen, gekrümmten Tragwerksglieder gleich den im vorigen Abschnitt ermittelten waagrechten Verschiebungen der Ränder der angrenzenden ebenen Falten. Es sind daher nur noch ihre lotrechten Durchbiegungen y zu bestimmen (Bild 9).

Wir denken uns hierzu die räumliche Scheibe aus dem Verbande gelöst, an ihre beiden Enden balkenartig gestützt und in einem Punkte mit der lotrechten Last $P=1$ belastet. Nachdem die Dicke der Scheibe so gering sein soll, daß ihre Torsionssteifigkeit praktisch nicht in Erscheinung tritt, ist dieses System zunächst verschieblich. Damit für $P=1$ überhaupt ein Gleichgewichtszustand entstehen kann, müssen wir die Scheibenränder seitlich stützen. Wir wählen eine radiale kontinuierliche Festhaltung. Die dazu gehörigen Stützkkräfte sind entgegengesetzt gleich den durch die Krümmung bedingten Abtriebskräften, die wir a_r nennen wollen.

Wir schneiden aus der lotrechten Scheibe ein Element von der Breite $R_m d\varphi$ und bringen die freiwerdenden inneren Kräfte als äußere Kräfte an. Neben den üblichen Wirkungen M , N und Q treten hier noch die vorhin erwähnten Abtriebskräfte a_r hinzu.

Das Moment dieser letzteren um die Tangente an die Scheibenachse ergibt sich zu

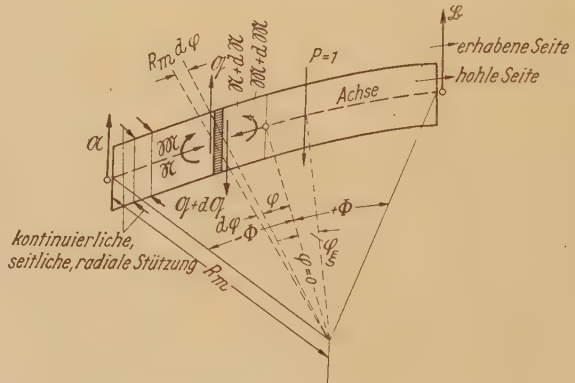


Bild 9

$$\begin{aligned} d\varphi \int_{-h_2}^{+h_1} \sigma_{\xi} b_{\xi} \cdot \xi d\xi &= d\varphi \underbrace{\frac{M_{n-1,n}}{J_{n-1,n}} \int_{-h_2}^{+h_1} b_{\xi} \cdot \xi^2 d\xi + d\varphi}_{J_{n-1,n}} \\ &+ d\varphi \underbrace{\frac{N_{n-1,n}}{F_{n-1,n}} \int_{-h_2}^{+h_1} b_{\xi} \cdot \xi \cdot d\xi}_{0} = M_{n-1,n} \cdot d\varphi, \end{aligned} \quad (75)$$

während ihre radial gerichtete, waagrecht liegende Resultierende

$$d\varphi \int_{-h_2}^{+h_1} \sigma_{\xi} \cdot b_{\xi} \cdot d\xi = d\varphi \underbrace{\mathfrak{M}_{n-1, n} \int_{-h_2}^{+h_1} b_{\xi} \cdot \xi \cdot d\xi}_0 + d\varphi \underbrace{\int_{-h_2}^{+h_1} b_{\xi} \cdot d\xi}_{F_{n-1, n}} = \mathfrak{N}_{n-1, n} \cdot d\varphi \quad (76)$$

beträgt. Dabei gehe die positive Richtung von der hohlen nach der erhabenen Seite.

Das Scheibenelement $R_m \cdot d\varphi$ muß nun im Gleichgewicht sein. Es ergibt sich daraus zunächst

$$\mathfrak{Q}' = 0 \quad (77)$$

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{Q} \cdot R_m \quad (78)$$

$$\mathfrak{N}' = 0. \quad (79)$$

Da für $\varphi = \pm \Phi$ die Normalkraft $\mathfrak{N} = 0$ ist, gilt $\mathfrak{N} \equiv 0$ für die ganze Scheibe.

Aus Gl. (77) ergibt sich

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}; \quad \mathfrak{Q} = -\mathfrak{B}, \quad (80)$$

$-\Phi \qquad \qquad +\Phi$

woraus wieder aus Gl. (78)

$$\mathfrak{M}_{\text{links}} = \mathfrak{A} \cdot R_m \cdot (\varphi + \Phi); \quad \mathfrak{M}_{\text{rechts}} = -\mathfrak{B} \cdot R_m (\varphi - \Phi) \quad (81)$$

folgt, wenn man berücksichtigt, daß an den beiden Auflagern $\mathfrak{M}_{\text{links}} = \mathfrak{M}_{\text{rechts}} = 0$ ist. Da für $\varphi = \varphi_{\xi}$ ebenfalls $\mathfrak{M}_{\text{links}} = \mathfrak{M}_{\text{rechts}}$ sein muß, ersieht man, daß

$$\mathfrak{A} (\Phi + \varphi_{\xi}) = \mathfrak{B} (\Phi - \varphi_{\xi}) \quad (82)$$

ist, woraus in Verbindung mit

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 1 \quad (83)$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varphi_{\xi}}{\Phi} \right); \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varphi_{\xi}}{\Phi} \right) \quad (84)$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\text{links}} &= \frac{R_m}{2} \left(1 - \frac{\varphi_{\xi}}{\Phi} \right) (\Phi + \varphi); \\ \mathfrak{M}_{\text{rechts}} &= \frac{R_m}{2} \left(1 + \frac{\varphi_{\xi}}{\Phi} \right) (\Phi - \varphi) \end{aligned} \quad (85)$$

folgt. Man sieht also, daß bei einer radial gestützten räumlichen Scheibe die inneren Kräfte $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{Q}$ gleich sind den eines ebenen Trägers, der sich durch Abwicklung dieser Scheibe in eine Ebene ergibt.

Unterwerfen wir das zu $P = 1$ gehörige Gleichgewichtssystem unserer räumlichen Scheibe einem beliebigen System virtueller Verschiebungen, so muß die dazugehörige virtuelle Arbeit verschwinden (Bild 9). Zweckmäßigerweise wählen wir als Verschiebungssystem die tatsächlich auftretenden Vorformungen, deren Komponenten uns durch Gl. (71 bis 74) bereits bekannt sind. Da die am unteren und oberen Scheibenrand wirkenden Abtriebskräfte a_r einander entgegengesetzt gleich sind, rührt der virtuelle Arbeitsanteil der letzteren nur von der Verdrehung der Scheibenelemente in radialer Richtung her. Er beträgt

$$-\int_{-\Phi}^{+\Phi} \frac{r_{n-2, n-1} - r_{n, n+1}}{h_{n-1, n}} \mathfrak{M}_{n-1, n} \cdot d\varphi, \quad (86)$$

wenn $h_{n-1, n}$ die Scheibenhöhe und $r_{n-1, n-2}$ bzw. $r_{n, n+1}$ die Radialverschiebungen der oberen bzw. unteren angrenzenden ebenen Scheibe bedeutet.

Die Dehnungen der Randfasern $n-1$ und n betragen

$$\begin{aligned} ds_{2; n-2, n-1} &= -\frac{\sigma_{n-1, n}}{E} R_{n-1, n} \cdot d\varphi = \\ &= \left[-\frac{M_{n-1, n}}{J_{n-1, n}} \cdot h_{1; n-1, n} + \frac{N_{n-1, n}}{F_{n-1, n}} \right] R_{n-1, n} \cdot d\varphi \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} ds_{1; n, n+1} &= -\frac{\sigma_{n-1, n}}{E} R_{n-1, n} \cdot d\varphi = \\ &= \left[+\frac{M_{n-1, n}}{J_{n-1, n}} \cdot h_{2; n-1, n} + \frac{N_{n-1, n}}{F_{n-1, n}} \right] R_{n-1, n} \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Die gegenseitige Verdrehung zweier benachbarter Querschnitte der lotrechten Scheibe $n-1, n$ hat also die Größe

$$\frac{ds_{2; n-2, n-1} - ds_{1; n, n+1}}{h_{n-1, n}} = -\frac{M_{n-1, n}}{E J_{n-1, n}} \cdot R_{n-1, n},$$

so daß der dazugehörige Arbeitsanteil

$$-\int_{-\Phi}^{+\Phi} \frac{M_{n-1, n}}{E J_{n-1, n}} \mathfrak{M}_{n-1, n} \cdot R_{n-1, n} \cdot d\varphi \quad (86a)$$

wird.

Da die tangentiellen Verschiebungen s auf die Abtriebskräfte senkrecht stehen, da ferner die Vektoren der $\mathfrak{M}_{n-1, n}$ und die der radialen Verschiebungen r jeweils zueinander parallel sind und außerdem $\mathfrak{M}_{n-1, n} = 0$ ist, entstehen durch diese letztgenannten Arbeitsfaktoren keine weiteren Beiträge. Die gesamte virtuelle Arbeit ist somit

$$(P=1) \cdot y_{n-1, n} - \int_{-\Phi}^{+\Phi} \mathfrak{M}_{n-1, n} \cdot \left(\frac{M_{n-1, n}}{E \cdot J_{n-1, n}} + \frac{r_{n-2, n-1} - r_{n, n+1}}{h_{n-1, n} \cdot R_{n-1, n}} \right) \cdot R_{n-1, n} d\varphi = 0, \quad (87)$$

wenn $y_{n-1, n}$ die lotrechte Durchbiegung der lotrechten Scheibe $n-1, n$ bei $P=1$ bedeutet.

Man erkennt also: „Die lotrechten Durchbiegungslinien der Kanten eines gekrümmten Balkenfaltwerkes sind gleich den Momentenlinien der mit

$$y_{n-1, n} = \left(\frac{M_{n-1, n}}{E J_{n-1, n}} + \frac{r_{n-2, n-1} - r_{n, n+1}}{h_{n-1, n} \cdot R_{n-1, n}} \right) \cdot R_{n-1, n} \quad (87a)$$

belasteten, in eine Ebene abgewickelten, räumlichen Scheiben.“

In differentieller Form geschrieben lautet dieser Lehrsatz

$$y''_{n-1, n} = - \left(\frac{M_{n-1, n}}{E J_{n-1, n}} + \frac{r_{n-2, n-1} - r_{n, n+1}}{h_{n-1, n}} \right) \cdot R_{n-1, n}. \quad (87b)$$

Er wird zusammen mit den Gl. (68) und (70) bei der Berechnung der äußerlich statisch unbestimmten gekrümmten Faltwerke benutzt.

9. Praktische Anwendung

Im Folgenden wollen wir einen in Bild 10 im Mittelschnitt dargestellten Theaterbalkon mit parallelen Endscheiben und von 14,75 m gerader Stützweite nach dem in Abschnitt 4 entwickelten Näherungsverfahren als leicht gekrümmtes Balkenfaltwerk für eine Vollast von 500 kg/m² berechnen.

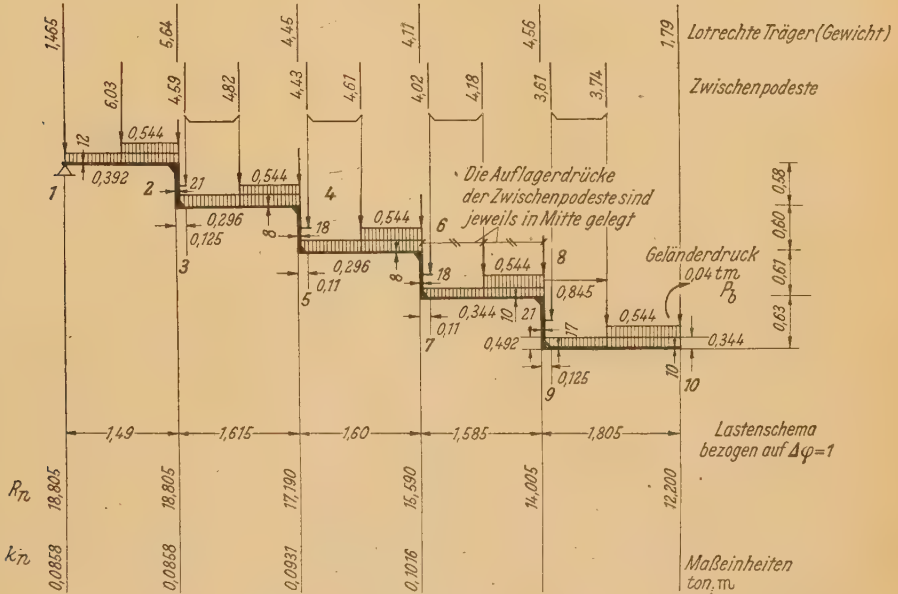


Bild 10

Zunächst werden mit Hilfe der in Abschnitt 7 angegebenen Drehwinkel die Stützmomente des keilförmigen Durchlaufträgers ermittelt, aus welchen sich wieder in bekannter Weise die auf die Bogeneinheit bezogenen Auflagerdrücke ergeben. Dividiert man diese jeweils durch die dazugehörigen Radien $R_{\nu, \nu+1}$, so erhalten wir die Faltenbelastungen $p_{\nu, \nu+1}$ als Gleichlasten je lfdm. Es ergibt sich auf diese Weise für die lotrechten Scheiben

$$p_{23} = 1,935 \text{ t/m}; \quad p_{43} = 1,705 \text{ t/m}; \quad p_{67} = 1,778 \text{ t/m}; \quad p_{89} = 2,906 \text{ t/m}$$

und für die waagerechten Glieder

$$\begin{aligned} p_{21} &= -0,134 \text{ t/m}; & p_{84} &= +0,134 \text{ t/m}; & p_{43} &= -0,034 \text{ t/m} \\ p_{56} &= +0,034 \text{ t/m}; & p_{65} &= -0,003 \text{ t/m}; & p_{78} &= +0,003 \text{ t/m} \\ p_{89} &= +2,493 \text{ t/m} & \text{und} & p_{9,10} &= -2,493 \text{ t/m}. \end{aligned}$$

Wir stellen nun die Gleichungssysteme (49a) und (49b) auf und erhalten, da alle Ableitungen der Konstanten p Null sind,

$$\begin{aligned} t''_2 + 0,3360 t''_3 &= -758,23 \\ t''_2 + 3,8854 t''_3 + 0,8617 t''_4 &= +1139,8 \\ t''_3 + 4,0154 t''_4 + 1,0935 t''_5 &= +1209,2 \\ t''_4 + 3,6876 t''_5 + 0,7652 t''_6 &= +396,0 \\ t''_5 + 3,9283 t''_9 + 1,0573 t''_7 &= +469,4 \end{aligned}$$

$$t'''_9 + 3,3854 t'''_8 + 0,6223 t'''_8 = -488,6$$

$$t'''_7 + 3,9489 t'''_8 + 1,0762 t'''_8 = -705,3$$

$$\text{und } t'''_8 + 2,9707 t'''_9 = +1437,8.$$

Bestimmt man hieraus die t'''_v , integriert 3 mal nach φ und berücksichtigt, daß infolge der Symmetrie der Belastung und des Tragwerkes das Glied mit φ^2 verschwinden muß, so erhält man

$$\begin{aligned} t'''_2 &= -924,0 ; \quad t_2 = -\frac{A_2}{154,00 \cdot \varphi^3 + B_2 \cdot \varphi} \\ t'''_3 &= +493,45 ; \quad t_3 = +82,24 \cdot \varphi_3 + B_3 \cdot \varphi \\ t'''_4 &= +169,9 ; \quad t_4 = +28,3 \cdot \varphi^3 + B_4 \cdot \varphi \\ t'''_5 &= +30,80 ; \quad t_5 = +5,1 \cdot \varphi^3 + B_5 \cdot \varphi \\ t'''_6 &= +147,1 ; \quad t_6 = +24,52 \cdot \varphi^3 + B_6 \cdot \varphi \\ t'''_7 &= -131,7 ; \quad t_7 = -21,95 \cdot \varphi^3 + B_7 \cdot \varphi \\ t'''_8 &= -305,1 ; \quad t_8 = -50,85 \cdot \varphi^3 + B_8 \cdot \varphi \\ t'''_9 &= +586,7 ; \quad t_9 = +97,78 \cdot \varphi^3 + B_9 \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Wir haben nun noch die Integrationskonstanten B_v zu bestimmen. Hierzu ermitteln wir zunächst die halben Öffnungswinkel der einzelnen lotrechten Falten und erhalten im Bogenmaß

$$\Phi_{23} = 0,40012, \quad \Phi_{45} = 0,44019,$$

$$\Phi_{67} = 0,48012 \text{ und } \Phi_{89} = 0,55040.$$

Die allgemeinen Ausdrücke für die maximalen Werte der Momente und Normalkräfte in Mitte ($\varphi = 0$) lauten für die lotrechten, räumlichen Scheiben

$$\begin{aligned} \max M_{n-1, n} &= p_{n-1, n} \cdot R_{n-1, n} \cdot \frac{\Phi_{n-1, n}^2}{2} + \left[(A_n + A_{n-1}) \cdot \frac{\Phi_{n-1, n}^2}{2} + (B_n + B_{n-1}) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\Phi_{n-1, n}^2}{2} \cdot \frac{h_{n-1, n}}{2} \cdot R_{n-1, n}. \end{aligned}$$

$$\max N_{n-1, n} = - \left[(A_n - A_{n-1}) \cdot \frac{\Phi_{n-1, n}^2}{2} + (B_n - B_{n-1}) \right] \cdot \frac{\Phi_{n-1, n}^2}{2} \cdot R_{n-1, n}$$

und für die waagerechten Scheiben

$$\begin{aligned} \max M_{n, n+1} &= \frac{R_{n-1, n} \cdot h_{n, n+1}}{2} \cdot \frac{\Phi_{n-1, n}^2}{2} \cdot \left(A_n \cdot \frac{\Phi_{n-1, n}^2}{2} + B_n \right) + \\ &\quad + \frac{R_{n+1, n+2} \cdot h_{n, n+1}}{2} \cdot \frac{\Phi_{n+1, n+2}^2}{2} \cdot \left(A_{n+1} \cdot \frac{\Phi_{n+1, n+2}^2}{2} + B_{n+1} \right) + \\ &\quad + \frac{5}{6} R_m \left[p_{n-1, n} \cdot \frac{R_{n-1, n}^2}{h_{n-1, n}} \cdot \frac{\Phi_{n-1, n}^4}{4} - p_{n+1, n+2} \cdot \frac{R_{n+1, n+2}^2}{h_{n+1, n+2}} \cdot \frac{\Phi_{n+1, n+2}^4}{4} \right] + \\ &\quad + R_m (p_{n, n+1} \cdot R_{n-1, n} \cdot \frac{\Phi_{n-1, n}^2}{2} + p_{n+1, n} \cdot R_{n+1, n+2} \cdot \frac{\Phi_{n+1, n+2}^2}{2}). \\ \max N_{n, n+1} &= - R_{n+1, n+2} \cdot \frac{\Phi_{n+1, n+2}^2}{2} \cdot A_{n+1} \cdot \frac{\Phi_{n+1, n+2}^2}{2} + B_{n+1} \Bigg) + \\ &\quad + R_{n-1, n} \cdot \frac{\Phi_{n-1, n}^2}{2} \cdot \left(A_n \cdot \frac{\Phi_{n-1, n}^2}{2} + B_n \right). \end{aligned}$$

Dabei wurde von der im Abschnitt 5 erwähnten Näherung $M(-\Phi_n) = 0$; $N(-\Phi_n) = 0$ Gebrauch gemacht. Bei den Ausdrücken für die waagerechten Scheiben werden die Integrationen für den Scheibenrand n von $-\Phi_n$ bis 0 und für den Scheibenrand $n+1$ von $-\Phi_{n+1}$ bis 0 durchgeführt.

Setzen wir in die obigen Formen der Scheibenbelastungen, die Öffnungswinkel Φ und die Beiwerte A_ν der ersten Lösungen ein, so erhalten wir für die Schnittgrößen in Tragwerksmitte lineare Ausdrücke in den B_ν . Drücken wir mit Hilfe dieser Beziehungen die Spannungen in Tragwerksmitte aus und setzen wir letztere kantenweise gleich, so ergibt sich das lineare System

$$\begin{aligned} &+1970,0 + 75,038 B_2 + 24,713 B_3 = 0 \\ &+4986,0 + 24,713 B_2 + 96,137 B_3 + 25,894 B_4 = 0 \\ &+4935,0 + 23,504 B_3 + 113,306 B_4 + 30,792 B_5 = 0 \\ &+3868,3 + 30,792 B_4 + 113,680 B_5 + 29,143 B_6 = 0 \\ &+4046,5 + 26,024 B_5 + 126,220 B_6 + 33,969 B_7 = 0 \\ &+2965,8 + 33,969 B_6 + 114,995 B_7 + 26,737 B_8 = 0 \\ &+4464,0 + 23,626 B_7 + 117,724 B_8 + 32,040 B_9 = 0 \\ &+9423,0 \quad \quad \quad + 33,040 B_8 + 95,290 B_9 = 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} B_2 &= -12,90, \quad B_3 = -40,53, \quad B_4 = -29,74, \quad B_5 = -19,98 \\ B_6 &= -23,38, \quad B_7 = 16,93, \quad B_8 = -8,39 \quad \text{und} \\ B_9 &= -96,07, \end{aligned}$$

woraus die Biegemomente und Normalkräfte in Tragwerksmitte folgen. Der Leser erkennt leicht, daß wir uns des 2. Verfahrens des Abschnittes 5 mit allen Vereinfachungen bedient haben. Es wird also

$$\begin{aligned} M_{12} &= -159,04 \text{ tm} & N_{12} &= + 37,98 \text{ t} + \text{Druck} \\ M_{23} &= + 28,94 \text{ tm} & N_{23} &= + 13,13 \text{ t} \\ M_{34} &= - 79,81 \text{ tm} & N_{34} &= - 6,14 \text{ t} \\ M_{45} &= + 25,60 \text{ tm} & N_{45} &= - 12,48 \text{ t} \\ M_{56} &= - 86,42 \text{ tm} & N_{56} &= + 5,69 \text{ t} \\ M_{67} &= + 28,94 \text{ tm} & N_{67} &= - 1,66 \text{ t} \\ M_{78} &= -108,48 \text{ tm} & N_{78} &= - 2,29 \text{ t} \\ M_{89} &= + 21,29 \text{ tm} & N_{89} &= + 138,44 \text{ t} \\ M_{9,10} &= + 18,32 \text{ tm} & N_{9,10} &= -172,38 \text{ t.} \end{aligned}$$

Aus diesen Ergebnissen ersieht man ohne weiteres, daß die Schnittkräfte in dem unteren Teil, wo die Krümmungen schärfer sind, erheblich von den Ergebnissen eines geraden Faltwerkes abweichen.

Wir wollen noch nach Abschnitt 4 den Genauigkeitsgrad der Näherungsrechnung feststellen. Es ergibt sich zunächst nach den Gl. (III) und (Ia, b) für Gleichlasten die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{n, n+1} &= + \frac{1}{5} \Phi^3 \left[\frac{(R_{n+1, n+2} \cdot \Phi)^2}{h_{n+1, n+2}} \bar{p}_{n+1, n+2} - \frac{(R_{n-1, n} \cdot \Phi)^2}{h_{n-1, n}} \bar{p}_{n-1, n} \right] - \\ &\quad - \frac{\Phi^2}{3} [(R_{n+1, n+2} \cdot \Phi) \bar{p}_{n, n+1} + (R_{n, n-1} \cdot \Phi) \bar{p}_{n-1, n}], \end{aligned}$$

woraus sich mit den obigen Werten für die Falte 12

$$\bar{\varepsilon}_{12} = + \frac{0,40012^5}{5 \cdot 0,58} \cdot 18,805^2 \cdot 1,935 + \frac{0,40019^3}{3} \cdot 18,805 \cdot 0,134 =$$

$$= + 2,42 + 0,05 = + 2,47 \text{ t}$$

und für die Falte 9, 10

$$\bar{\varepsilon}_{9,10} = - \frac{0,55040^5}{5 \cdot 0,63} \cdot 14,005^2 \cdot 2,906 + \frac{0,5504^8}{3} \cdot 14,005 \cdot 2,493 =$$

$$- 9,15 + 1,94 = - 7,19 \text{ t}$$

Diese absoluten Fehler sind in Anbetracht der sonst auftretenden großen Kraftwirkungen relativ klein, so daß die Anwendung des Abschnittes 4 bei diesem Faltwerk noch zulässig ist.

Die Ergebnisse lassen nun erkennen, wie bei einem solchen gekrümmten Faltwerk der Kräfteausgleich vor sich geht. Die Abtriebskräfte werden infolge der nach unten abnehmenden Radien nach dorthin immer größer. Sie werden durch die ebenen, waagerechten Scheiben aufgenommen. Während sich bei den mittleren derselben die Abtriebskräfte zum Teil aufheben, ist dies bei den waagerechten Randscheiben nicht der Fall, da dort immer einer der beiden entlastenden, lotrechten Träger fehlt. Es treten also in diesen Randscheiben große Biegemomente auf und zwar liegen bei der oberen Scheibe die Zugspannungen auf der konvexen und bei der unteren Scheibe auf der konkaven Seite. Bei allen Scheiben wirken die auftretenden Schubflüsse auf die Biegung entlastend. Die lotrechten Scheiben haben durchwegs positive Biegemomente, während diejenigen der waagerechten Träger, bis auf das der untersten Scheibe, negativ sind. Die Normalkräfte sind mäßig. Nur in den beiden untersten Scheiben wachsen sie zu beträchtlichen Größen an. Besonders sei auf die Zugkraft von 172,4 ton hingewiesen, die im untersten waagerechten Träger auftritt. Es geht daraus hervor, daß letzterem im gesamten Kräfteausgleich eine wichtige Rolle zukommt. Er bildet gewissermaßen die untere Verriegelung des Faltwerkes.

Die letzte Schlußscheibe 9,10 ragt frei aus, während die obere zweiseitig gelagert ist.

Das Tragwerk ist durch seine niedrige Bauhöhe bemerkenswert. Das Schlankheitsverhältnis beträgt nur 1:24,5.

Dieses Tragwerk wurde beim Wiederaufbau des Opernhauses der Stadt Essen als freitragender Balkon eingebaut. Die nachstehenden Bilder 11 und 11a geben eine Übersicht der Bewehrung und eine Untersicht wieder.

10. Schubspannungen in Faltwerken

Aus der Differenz der Normalspannungen zweier benachbarter Querschnitte eines Scheibenelementes von der Breite $R_m \cdot d \varphi$ ergibt sich (Bild 12)

$$\bar{t}_{\xi} = \frac{M'}{J} S_{\xi} + \frac{N'}{F} F_{\xi} + \bar{t}_1 + T_{\xi} \quad (1)$$

Dabei bedeutet $\bar{t}_{\xi}$ die Schubkraft je Bogenlänge 1 und

$$F_{\xi} = \int_{\xi}^{h_1} b_v \cdot dv, \quad (1a)$$

$$S_{\xi} = \int_{\xi}^{h_1} b_v \cdot v \cdot dv. \quad (1b)$$

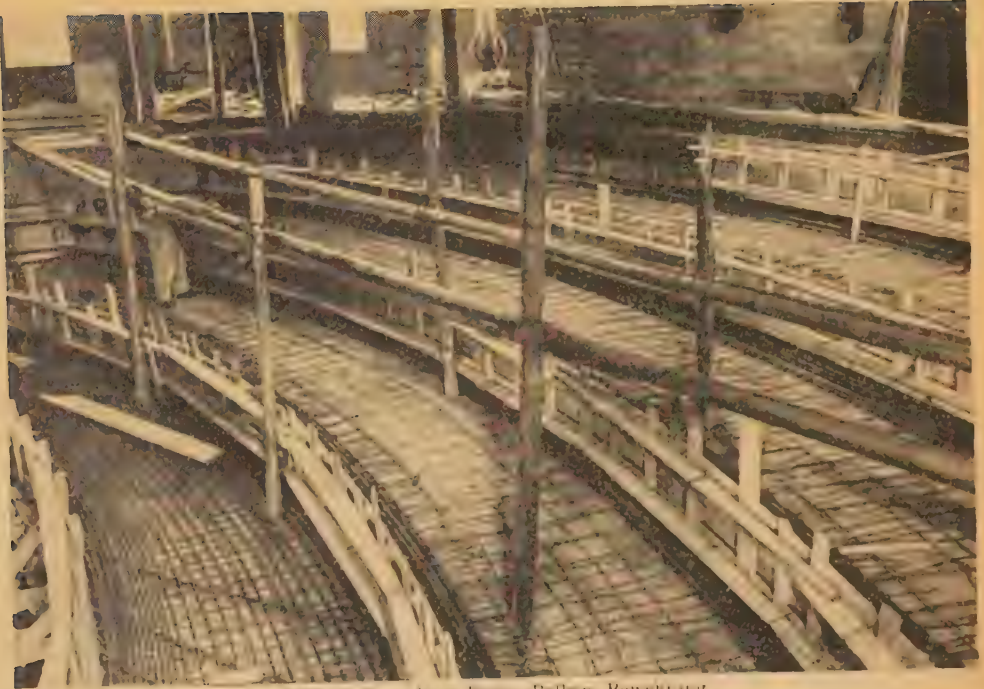


Bild 11. Opernhaus Essen, Balkon, Bewehrung



Bild 11a. Opernhaus Essen, Balkon, Untersicht

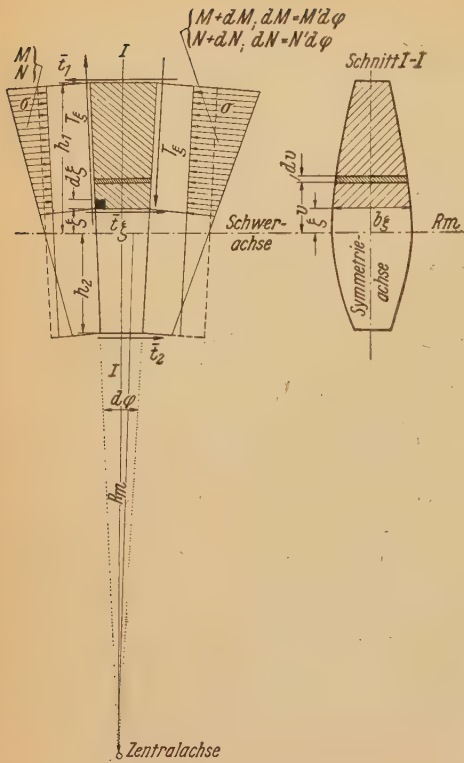


Bild 12

M' und N' stellen Ableitungen nach φ dar. Außerdem sind sie reine Funktionen dieser Variablen. Da in dem in Bild 12 hervorgehobenen Element die lotrechten und waagerechten Schubspannungen einander gleich sind, wird der Anteil der gesamten Querkraft Q

$$T_\xi = \int_{\xi}^{h_1} \frac{t_\xi}{R_m + \xi} d\xi. \quad (1c)$$

Geht man mittelst der Beziehung

$$t_\xi = \frac{\bar{t}_\xi}{R_m + \xi} \quad (2)$$

auf die Schubkraft t_ξ je Längeneinheit über und beachtet, daß die folgenden Ableitungen nach ξ

$$F'_\xi = -b_\xi; \quad S'_\xi = -\xi b_\xi$$

$$T'_\xi = -\frac{t_\xi}{R_m + \xi} = -t_\xi$$

bestehen, so ergibt die Differentiation der Gl. (1) nach ξ die lineare Gleichung 1. Ordnung

$$t'_\xi (R_m + \xi) + 2t_\xi = - \left(-\frac{M'}{J} \xi + \frac{N'}{F} \right) b_\xi = -\Psi(\xi) \quad (3)$$

mit dem allgemeinen Integral

$$t_\xi = -\frac{1}{(R_m + \xi)^2} \left[C + \int (R_m + \xi) \Psi(\xi) d\xi \right]. \quad (4)$$

Da $t_\xi = t_1$ für $\xi = h_1$ wird, so erhalten wir weiter

$$t_\xi = \left(\frac{R_m + h_1}{R_m + \xi} \right)^2 t_1 + \frac{1}{(R_m + \xi)^2} \int_{\xi}^{h_1} (R_m + \xi) \Psi(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Führt man die Integration durch, so wird schließlich

$$t_\xi = \frac{R_m^2}{(R_m + \xi)^2} \left[\left(\frac{J_\xi}{R_m} + S_\xi \right) \frac{M'}{R_m J} + \left(\frac{S_\xi}{R_m} + F_\xi \right) \frac{N'}{R_m F} + \left(1 + \frac{h_1}{R_m} \right)^2 t_1 \right], \quad (6)$$

wobei

$$J_\xi = \int_{\xi}^{h_1} b_\xi \xi^2 d\xi \quad (6c)$$

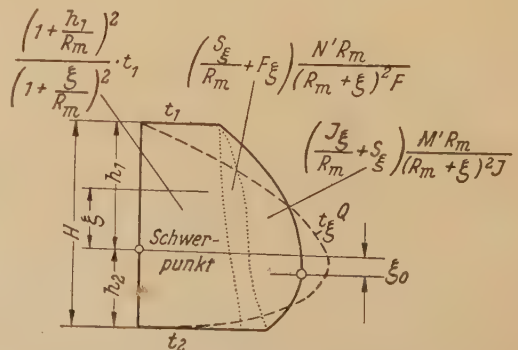


Bild 13

bedeutet (Bild 13). Stellt man die beiden, den Gl. (4) und (6) des Abschnittes 2 entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen auf, so erhalten wir

$$\frac{N'}{R_m} = -t_1 \left(1 + \frac{h_1}{R_m}\right) + t_2 \left(1 - \frac{h_2}{R_m}\right) - \frac{Q}{R_m} \quad (7a)$$

und

$$\frac{M'}{R_m} = -t_1 \left(1 + \frac{h_1}{R_m}\right) h_1 - t_2 \left(1 - \frac{h_2}{R_m}\right) h_2 + Q, \quad (7b)$$

mit welchen wir t_ξ als lineare Funktion der Schubwirkungen t_1 , t_2 und Q wie folgt ausdrücken können,

$$\begin{aligned} J \left(1 + \frac{\xi}{R_m}\right) t_\xi &= \left(1 + \frac{h_1}{R_m}\right) t_1 \left[\frac{J_\eta h_1}{R_m} - S_\xi \left(h_1 + \frac{i^2}{R_m}\right) + F_\eta \cdot i^2 \right] + \\ &+ \left(1 - \frac{h_2}{R_m}\right) t_2 \left[-\frac{J_\xi h_2}{R_m} - S_\xi \left(h_2 - \frac{i^2}{R_m}\right) + F_\xi \cdot i^2 \right] + \\ &+ Q \left[\frac{J_\xi}{R_m} + S_\xi \left(1 - \frac{i^2}{R_m^2}\right) - \frac{F_\xi \cdot i^2}{R_m} \right]; \\ i &= \sqrt{\frac{J}{F}}; \quad F = F_\xi + F_\eta; \quad J = J_\xi + J_\eta \quad [\text{siehe Gl. (1a, 6c)}]. \end{aligned} \quad (8)$$

In dieser Gleichung wird für $\xi = h_1$, $t_\xi = t_1$ und für $\xi = -h_2$, $t_\xi = t_2$. Schließlich können wir noch mittelst

$$s_\xi = \left(\frac{M}{J} \xi + \frac{N}{F}\right) b_\xi; \quad s_{\xi I} = \frac{s_\xi}{2} \pm \sqrt{\frac{s_\xi^2}{4} + t_\xi^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2t_\xi}{s_\xi}$$

die Intensität und Richtung der Spannungstrajektoren in jedem Querschnittspunkte bestimmen.

Führt man für die Gl. (6) den Grenzübergang $R_m \rightarrow \infty$ durch, so erhalten wir die Ergebnisse für gerade Scheiben. Beachten wir, daß

$$\lim_{R_m \rightarrow \infty} \frac{M'}{R_m} = \lim_{R_m \rightarrow \infty} \frac{dM}{R_m d\varphi} = \frac{dM}{dx} = M_x' \quad (8a)$$

und analog

$$\lim_{R_m \rightarrow \infty} \frac{N'}{R_m} = N_x', \quad (8b)$$

ferner

$$\lim_{R_m \rightarrow \infty} \left(\frac{J_\xi}{R_m} + S_\xi\right) \frac{1}{J} = \frac{S_\xi}{J} \quad \text{und} \quad \lim_{R_m \rightarrow \infty} \left(\frac{S_\xi}{R_m} + F_\xi\right) \frac{1}{F} = \frac{F_\xi}{F}$$

ist, so folgen die Schubkräfte je Längeneinheit zu

$$t_\xi^{(x)} = \frac{S_\xi}{J} M_x' + \frac{F_\xi}{F} N_x' + t_1, \quad (9)$$

wobei der Zeiger x daran erinnern soll, daß x die neue Abszisse ist. Bildet man $\lim_{R_m \rightarrow \infty} t_\xi$ für die Gl. (8), so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$t_\xi^{(x)} = \frac{(Q - t_1 h_1 - t_2 h_2)}{\bar{Q}} \frac{S_\xi}{J} + \frac{F_\eta}{F} t_1 + \frac{F_\xi}{F} t_2; \quad \bar{Q} = M', \quad (10)$$

wobei Q die gesamte Querkraft bedeuten soll.

Von Interesse ist auch die relative Abweichung $\Delta t_{\xi} = (t_{\xi} - t_{\xi}^{(x)}) : t_{\xi}^{(x)}$. Sie verschwindet für die beiden Ränder $\xi = h_1$ und $\xi = -h_2$. Für den Schwerpunkt $\xi = 0$ beträgt sie hingegen

$$\Delta t_0 = \left[\left(1 + \frac{h_1}{R} \right) t_1 \left[\frac{J_{\eta}^0 h_1}{R J} - \frac{S_0 h_1^2}{(R + h_1) J} - \frac{S_0}{R F} + \frac{F_{\eta}^0 h_1}{(R + h_1) F} \right] + \left(1 - \frac{h_2}{R} \right) t_2 \left[-\frac{J_{\xi}^0 h_2}{R J} + \frac{S_0 h_2^2}{(R - h_2) J} - \frac{S_0}{R F} - \frac{F_{\xi}^0 h_2}{(R - h_2) F} \right] + Q \left[\frac{J_{\xi}^0}{R J} - \frac{S_0}{R^2 F} - \frac{F_{\xi}^0}{R F} \right] \right] : t_0^{(x)}. \quad (11)$$

Da die Quotienten J_{η}^0/J ; J_{ξ}^0/J ; S_0/J ; S_0/F ; F_{η}^0/F sowie F_{ξ}^0/F kleiner als die Querschnittshöhe H sind und da R überall im Nenner steht, ist Δt_0 , besonders bei schwachen Krümmungen, immer sehr klein. Durch die Werte an den drei ξ -Stellen h_1 , $-h_2$ und 0 ist der Verlauf der Abweichungen Δt_{ξ} genügend charakterisiert.

Ist nur Q allein vorhanden, so wird

$$\Delta t_Q = \left[\frac{J_{\xi}^0}{S_{\xi} R} - \frac{i^2}{R^2} - \frac{F_{\xi}^0 \cdot i^2}{S_{\xi} R} + \frac{\xi}{R} \left(2 + \frac{\xi}{R} \right) \right] : \left(1 + \frac{\xi}{R} \right)^2. \quad (12)$$

Das Maximum von t_{ξ} tritt an der Stelle ξ_0 ein, für welche $t'_{\xi} = 0$ wird. Dividieren wir Gl. (3) durch $R_m \cdot b_{\xi}$ und setzen $t'_{\xi} = 0$, so erhalten wir, wenn τ_{ξ} die Schubspannung ist,

$$+ \frac{2 t_{\xi}}{R_m b_{\xi}} = + \frac{2 \tau_{\xi_0}}{R_m} = - \left(\frac{M'}{J R_m} \xi_0 + \frac{N'}{F R_m} \right), \quad (13)$$

woraus ξ_0 wie folgt bestimmt werden kann. Man berechnet mittelst Gl. (6) oder (8) die $\frac{t_{\xi}}{b_{\xi}} = \tau_{\xi}$ -Linie und bringt sie mit der Geraden $-\frac{R_m}{2F} \left(\frac{M'}{i^2 R_m} \xi + \frac{N'}{R_m} \right)$ zum Schnitt. Die Koordinaten des Schnittpunktes stellen ξ_0 und τ_{ξ_0} dar, woraus $t_{\xi_0 \max} = \tau_{\xi_0} \cdot b_{\xi_0}$ folgt (Bild 14).

Für eine gerade Scheibe wird wegen $R_m \rightarrow \infty$ die linke Seite von Gl. (13) Null und es wird wegen Gl. (8a) und (8b)

$$\xi_0^{(x)} = - \frac{N_{x'}'}{M_{x'}'}. \quad (14)$$

Da aber in Gl. (13) die linke Seite gegenüber der rechten immer sehr klein ist, liegen ξ_0 und $\xi_0^{(x)}$ immer sehr nahe beisammen.

Aus

$$\sigma = \frac{M}{J} \xi + \frac{N}{F} \quad (15)$$

ergibt sich die Nullstelle $\xi_0^{(\sigma)}$ der Normalspannungen σ zu

$$\xi_0^{(\sigma)} = - \frac{N}{M} i^2. \quad (16)$$

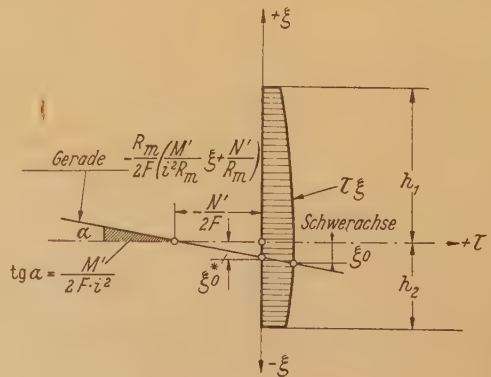


Bild 14

Handelt es sich um eine gerade Scheibe, bei welcher die N -Linie und M -Linie zueinander affin sind, wo also

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{e} = \frac{N'}{M'} \quad (17)$$

ist, so wird $\xi_0^{(\sigma)} = \xi_0^{(x)}$, , das heißt, das $t_{\xi_0 \max}^{(x)}$ tritt an derselben Querschnittsstelle auf, an der die Normalspannungen σ verschwinden. Daraus folgt, daß die Hauptspannungen $\sigma_{I, II}$ die, im Abstand e von der Scheibenachse liegende, achsparallele Gerade unter 45° kreuzen und dort die Größe $\pm t_{\xi_0 \max}^{(x)}$ annehmen.

Für ein Rechteck von der Höhe $2h$ geht Gl. (8) mit $\varrho = \frac{\xi}{h}$ über in

$$\begin{aligned} 4 \left(1 + \frac{\varrho h}{R} \right) t_\xi = & \left[\frac{h}{R} (1 + \varrho^2 + 2\varrho^3) - (1 - 2\varrho - 3\varrho^2) \right] \left(1 + \frac{h}{R} \right) t_1 - \\ & - \left[\frac{h}{R} (1 + \varrho^2 - 2\varrho^3) + (1 + 2\varrho - 3\varrho^2) \right] \left(1 - \frac{h}{R} \right) t_2 + \\ & + 2(1 - \varrho^2) \left[\frac{1}{R} \left(2\varrho - \frac{h}{R} \right) + \frac{3}{2h} \right] Q, \end{aligned} \quad (18)$$

woraus für $\varrho = 0$ die Schubkraft im Schwerpunkt folgt. Es wird

$$t_0 = -\frac{1}{4} (t_1 + t_2) \left(1 - \frac{h^2}{R^2} \right) + \frac{Q}{2h} \left(\frac{3}{2} - \frac{h^2}{R^2} \right), \quad (19)$$

woraus man wieder den geringen Einfluß der Krümmung erkennt.

Für eine gerade Scheibe mit rechteckigem Querschnitt ergibt sich mit $R \rightarrow \infty$ aus Gl (18)

$$t_\xi^{(x)} = \frac{[Q - h(t_1 + t_2)]}{Q} (1 - \varrho^2) \frac{3}{4h} + \frac{1}{2} (t_1 + t_2) - \frac{\varrho}{2} (t_1 - t_2). \quad (20)$$

Ist M' gegenüber N' groß, was nach den Gl. (7a) und (6) immer dann eintritt, wenn $t_1 \cong t_2$ ist, so hat die Gerade $-\frac{R_m}{F} \left(\frac{M'}{i^2 R_m} \xi + \frac{N'}{R_m} \right)$ eine sehr flache Neigung gegen die Scheibenachse, so daß $\xi_0 \cong 0$ und $t_{\xi_0 \max} \cong t_0$ wird. Verteilt man dann noch die t derart, als ob nur Q allein vorhanden wäre, so hat diese t_ξ -Linie, die in Bild 13 strichiliert dargestellt ist, ihr Maximum ebenfalls mit großer Näherung im Schwerpunkt $\xi = 0$. Für gerade Scheiben trifft letzteres sogar genau zu. Wegen der Flächengleichheit der wahren und der strichilierten t_ξ -Linie ist außerdem das $t_{\xi \max}$ der letzteren immer größer als das der ersteren. Wenn wir also die Schubwirkungen bei $t_1 \cong t_2$ nur nach der gesamten Querkraft Q bestimmen, haben wir eine sehr gute Näherung und liegen außerdem immer auf der sicheren Seite.

Wir wollen noch die Ergebnisse kurz zusammenfassen. Schwach gekrümmte Scheiben können auf Schub wie gerade Träger berechnet werden. Ist die Ausmitte $e = \frac{M}{N}$ konstant, so treten in jedem Querschnitt die $t_{\xi \max}$ im Nullpunkt der Normalspannungen σ auf, so daß die Hauptzugspannungen gleich den $t_{\xi_0 \max}^{(x)}$ werden und die im Abstand e von der Scheibenachse verlaufende, achsparallele Gerade unter 45° kreuzen. Die Schubabwehrung kann dann nach den bekannten Methoden des Stahlbetonbaues aus der Linie der $t_{\xi_0 \max}^{(x)}$ ermittelt werden, wobei jedoch die Aufbiegungsorte der Schrägeisen auf die oben erwähnte achsparallele Gerade zu projizieren sind. Sind die Belastungen der einzelnen Scheiben zueinander affin, so ist die Bedingung $e = \text{konst.}$ für gerade Balkenfaltwerke genau und für schwachgekrümmte Tragwerke mit großer Näherung erfüllt. Gilt

hingegen $t_1 \cong t_2$, so kann man immer mit genügender Genauigkeit die Scheibe nach DIN 1045 unter Zugrundelegung der gesamten Q -Linie berechnen.

Sind die Voraussetzungen für die obigen Näherungen nicht genügend vorhanden, so müssen Spannungstrajektorien ermittelt werden.

Handelt es sich um schärfer gekrümmte Scheiben, so sind unter Zuhilfenahme der genauen Gl. (6), (8) und (15) ebenfalls Trajektorien zu errechnen. Von welchem Wert des Verhältnisses H/R_m ab man diese genauen Formeln benützen muß, hängt von der Größe der jeweils zugelassenen Abweichungen Δt_{ξ} ab, welche man mittelst der Gl. (11) jeweils überwachen kann. Ein Δt_{ξ} von 5% dürfte in allen Fällen noch zulässig sein.

Fallen die Orte der $t_{\xi \max}$ nicht genau mit den Nullpunkten der σ zusammen, so kann man trotzdem mit genügender Genauigkeit die Hauptzugspannung gleich den $t_{\max}$ setzen und sie unter 45° wirkend annehmen.

Die räumlichen Träger sind immer wie gerade Scheiben in obigem Sinne zu behandeln. Für die Berechnungen ist es zweckmäßig, sie in eine Ebene abzuwickeln.

Als wertvolle Ergänzung unserer Fachzeitschriften erscheint die Schriften-Reihe

BAUTECHNIK-ARCHIV

in zwangloser Folge. Sie bringt bemerkenswerte Beiträge aus dem Gebiet des Bauingenieurwesens, insbesondere Forschungsberichte und Forschungsergebnisse, die nach Art und Umfang über den Rahmen einer Fachzeitschrift hinausgehen und von besonderem wissenschaftlichen Wert sind.

Heft 1:

Zum Geleit. — Zeitgemäße Fragen aus dem neueren Schrifttum des Ingenieurbaues. Von Dipl.-Ing. *Torben v. Rothe*. — Kolbenlose Pressen (Druckkissen) im Bauwesen. Von Dipl.-Ing. *Feodor Hörnlmann*. — Grundsätzliches zur Frage der Grundwasserabsenkung. Von Dr.-Ing. *Hermann Weber*. — Einfluß der Verdrehungssteifigkeit der Hauptträger auf die Lastverteilung beim Trägerrost nach Rechnung und Versuch. Von Dr.-Ing. *Jos. Schöttgen*. — Störungsfreie Kaminkopfausbildung. Von Dipl.-Ing. *Otto Spitzner*. Gr.-8°. 49 Seiten, 52 Abbildungen. 1947. Geheftet DM 6,—

Heft 2:

Erfahrungen eines Wasserbauers. Nach einem hinterlassenen Manuskript „Mein dienstlicher Lebenslauf“ des Dr.-Ing. e. h. Zander, Honorarprofessor an der Technischen Hochschule Hannover, Strombaudirektor a. D., zusammengefaßt von *Walther Paxmann*, Ministerialrat i. R. — Die Abwasserreinigung und die sich dabei abspielenden stofflichen Vorgänge. Von Prof. Dr.-Ing. *Erwin Marquardt*. — Über die Druckverteilung im Boden hinter Wänden verschiedener Art. Mit Ergebnissen eigener Versuche. Von Dr.-Ing. *Heinrich Press*. Gr.-8°. 54 Seiten, 53 Abbildungen. 1948. Geheftet DM 6,40

Heft 3:

Geleitwort. — Widmung zum 20 jährigen Bestehen der Degebo. Von *J. Volk*. — Noch offenstehende Probleme auf dem Gebiete des Grundbaues. Von Prof. Dr.-Ing. *Arnold Agatz* und Dr.-Ing. *Erich Lackner*. — Arbeiten der Degebo in den Jahren 1938—1948. Von Dr.-Ing. *Heinz Muhs*. — Anwendung des seismischen Bodenuntersuchungsverfahrens bei einem Talsperrenbau. Von Prof. Dr.-Ing. *Hans Lorenz*. — Meßtechnische Grundlagen bei Setzungsmessungen an großen Bauwerken. Von Prof. Dr. *Erich Brennecke* und Dipl.-Ing. *Karl Ansoerge*. — Untersuchungen an einem fehlerhaften Kompressorfundament. Von Dr. phil. *Otto Förtsch* und Dr.-Ing. *Heinz Muhs*. — Schwingungsuntersuchungen an einfachen Mauerwerkskörpern und Gebäuden. Von Dr. phil. *Alfred Ramspeck* und Dr. phil. *Gustav-Adolf Schulze*. — Das technische Experiment in der Bodenmechanik. Von Prof. Dr.-Ing. h. c. *August Hertwig*. Gr.-8°. 74 Seiten, 76 Abbildungen. 1949. Geheftet DM 7,20

Heft 4:

Tulla, Honsell, Rehbock. Lebensbilder dreier Wasserbauingenieure am Oberrhein. Von Prof. Dr.-Ing. *Heinrich Wittmann*. — Berechnung und Bau von Plattenbrücken. Von Dr.-Ing. *Rudolf Ohlig*. Gr.-8°. 73 Seiten, 3 Bildnisse, 25 Abbildungen. 1949. Geheftet DM 7,50

Heft 5:

Neue Erfahrungen auf dem Gebiete der Verfestigung und Abdichtung des Untergrundes. Von Bergassessor a. D. *Hans Jähde*. — Die Gleichungen der Stau- und Senkungswerten für rechteckigen und parabolischen Gerinneschnitt und ihre praktische Anwendung. Von Prof. *Leopold Rothmund*. — Über Zusammenhänge zwischen der technischen Balkenbiegungslehre und der Scheibentheorie. Von Prof. Dr.-Ing. *Günther Worch*. Gr.-8°. 60 Seiten, 41 Abbildungen. 1949. Geheftet DM 5,20

Heft 6:

Der T-Träger unter Belastung durch Drehmomente. Ein Beitrag zur Lösung verschiedener Probleme mit den Methoden der gewöhnlichen Baustatik. Von Dr.-Ing. *Karl Adolf Müller*. — Das Knickproblem bei Spitzenpfählen, deren Schaft ganz oder teilweise in nachgiebigem Boden steht. Von Dipl.-Ing. *Helmut Walter*. — Die Berechnung kreisförmiger zentralsymmetrischer Fundamentplatten nach dem Differenzenverfahren. Von Prof. Dr.-Ing. *Günter Worch*. Gr.-8°. 66 Seiten, 57 Abbildungen. 1951. Geheftet DM 8,60

Heft 8:

Vorträge der Baugrundtagung 1952 in Essen vom 30. Januar bis 2. Februar. Veranstalter: Deutsche Gesellschaft für Erd- und Grundbau e. V. und Arbeitsgruppe Baugrund im Fachnormenausschuß Bauwesen gemeinsam mit dem Haus der Technik e. V. Essen (Außeninstitut der Rhein.-Westf. Technischen Hochschule Aachen).

Deichbau im Emschergebiet. Von Reg.-Baumeister a. D. Dr.-Ing. *Helmut Carp*. — Die Standsicherheit von Bergehalden. Von Dr.-Ing. *Josef Schmidbauer*. — Die Berechnung der Standsicherheit von Böschungen und Staudämmen. Von Prof. *Johann Ohde*. — Verdichtung von Rohr- und Kabelgräben in Stadtstraßen. Von Stadtbaudirektor *Richard Auberlen*. — Kurzbericht über das Messen des Porenwasserüberdrucks. Von Reg.-Baurat *Peter Siedek*. — Einfluß der „Gewölbebildung“ auf die Erddruckverteilung. Von Prof. *Gregory P. Tschebotarioff*. — Holländische Anschauungen über die Tragfähigkeit gerammter Pfähle. Von Ir. J. P. *van Bruggen*. — Untersuchung des Baugrundes mit einer Spitzendrucksonde. Von Dipl.-Ing. *Hermann Kahl*. — Baustellenversuche mit seitlich beanspruchten Stahlpfählen und Vorspannung der Verankerung von Stützwänden. Von Reg.-Baumeister a. D. Dr.-Ing. *E. Knop*. — Staudämme aus Steinschüttung mit Asphaltabdichtung auf der Wasserseite. Von Oberbaudirektor a. D. Dr.-Ing. *Erich Lohmeyer*. — Bodenmechanische Probleme im Bergbau. Von Prof. Dr.-Ing. *Edgar Schultze*. — Zur Tragfähigkeit starrer Spundwände und Mastgründungen. Von Prof. Dr.-Ing. *Hans Lorenz*. — Justierung des Kraftwerkes Hessigheim am Neckar durch Heben mit Hilfe von Zementunterpressungen. Von Prof. Dr. techn. *Walter Bernatzik*. — Tragfähigkeit von Schlammböden. Von R. *L'Herminier*. G.-8°, VIII, 97 Seiten, 165 Bilder. 1952. Geheftet DM 12,—

Heft 9:

Erddruckversuche an einer durch Reibung verankerten Stützwand. Von Dr.-Ing. *Heinz Muhs*. — Über das Verhalten von Pfahlgründungen bei Schwingungserregung. Von Dr.-Ing. *Günther Brandes*. — Baugrubenumschließung nach dem Gefrierverfahren. Von Prof. Dr.-Ing. habil. *Willy Sichert* und Dr.-Ing. *Panajotis Chardabellas*. In Vorbereitung

Heft 10:

Über die Biegemomente der Randträger von kreuzweise bewehrten Fahrbahnplatten. Von Prof. Dr.-Ing. *Adolf Pucher*. — Die durch beliebig viele elastische Spanten versteifte, keiskegelförmige Membrane mit veränderlicher Wandstärke. Von Dr.-Ing. habil. *Ernst Gruber*. In Vorbereitung

Zu beziehen durch jede Buchhandlung